Министерство образования и науки РФ
Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный университет технологии и дизайна»

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Краткий конспект лекций

для студентов СПГУТД, обучающихся по специальности 220301 (210200) – Автоматизация технологических процессов и производств (текстильная и легкая промышленность, полиграфия)

Раздел 1. Кинематика.
Раздел 2. Введение в динамику. Статика твердого тела.

Составил А. Г. Усов

Петербург, 2009

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

В.1. Основные объекты, изучаемые в курсе теоретической механики: материальная точка, твердое тело, механическая система с конечным числом степеней свободы. Движение этих объектов описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями (в отличие от дифференциальных уравнений с частными производными, описывающих движение сплошной среды).

В.2. Материальная точка - физическое тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстояниями, на которые оно перемещается. Бесструктурный объект нулевой размерности, обладающий единственным существенным качеством – массой.

В.3. Механическая система - множество материальных точек, движения которых взаимосвязаны.

В.4. Твердое тело - механическая система, расстояние между *любыми* двумя точками которой остается неизменным. Совокупность изменений расстояний между точками тела представляет собой деформацию тела.

В.5. Механическое движение - упорядоченное изменение взаимного расположения механических объектов. Изучение порядка изменения основывается на идее *времени.* Изучение порядка расположения - на идее *пространства.*

♦ Обсуждение смысла понятий «пространство» и «время» продолжается в позитивных науках и в философии с античных времен по настоящее время. Философский словарь 1983 г. акцентирует свойство времени выражать «последовательность смены состояний материальных систем и процессов». Переведенная с немецкого языка энциклопедия, изданная Шуваловым в 1781 г., обращает внимание читателя на *случайную ткань времени*: «Порядок случайных вещей, одна за другою последующих».

В.6. Свойства пространства и времени в классической механике

Пространство характеризуется своими топологическими и метрическими свойствами. Пространство в классической механике бесконечно делимо: допускается существование сколь угодно малых пространственных промежутков (в квантовой механике устанавливается предел дробления: минимальная «планковская» длина имеет порядок $10^{-35}\,м$).Размерность пространства $\dim = 3$ соответствует закону обратных *квадратов* при электростатическом или гравитационном взаимодействии. Положение точки пространства задается координатами x^1, x^2, x^3.

Пространство в классической механике является евклидовым. Квадрат длины бесконечно малого пространственного промежутка равен

$$ds^2 = dx^1 dx^1 + dx^2 dx^2 + dx^3 dx^3.$$

Пространство однородно (отсутствуют «избранные» места) и изотропно (отсутствуют «избранные» направления). Метрические свойства фигур - расстояния между их точками и углы - не меняются при параллельном переносе фигур в пространстве, при повороте и зеркальном отражении от плоскости.

Время бесконечно делимо, однородно и однонаправлено. В каждой новой задаче механики отсчет времени начинается с нуля: $t \in [0;T]$, где T - граница существования условий задачи; если она не установлена, то $t \in [0;\infty)$.

♦ Свойства пространства и времени («пространства-времени») и физические законы взаимно соответствуют друг другу. Пространство специальной теории относительности – псевдоевклидово пространство Минковского. Пространство общей теории относительности можно представить себе как трехмерный аналог расширяющейся сферы, конечной, но безграничной.

Существуют различные модели эволюции вселенной. Эруптивные модели представляют развитие Вселенной результатом распада (эрупции) некоторого протовещества. Согласно дисперсным моделям эта эволюция есть следствие «рассыпания» сингулярной точки на множество первичных элементов вещества. Например, IλCDM (Inflationary Lambda Cold Dark Matter model) – инфляционная модель (дисперсионная, предполагающая быстрое раздутие – инфляцию – Вселенной сразу после Большого Взрыва) с λ – членом и холодным тёмным веществом. Космологическая постоянная λ характеризует современное ускорение расширения Вселенной. Тёмное (не наблюдаемое в опытах) вещество вместе с «тёмной энергией» антигравитации составляют, возможно, до 95% Вселенной.

В.7. Система отсчета - физическое тело (обычно твердое тело), относительно которого рассматривается движение изучаемых

объектов. Предполагается, что система отсчета всюду оборудована часами.

В.8. Обобщенные координаты механической системы – это взаимно независимые скалярные величины, однозначно определяющие положение системы в пространстве относительно заданной системы отсчета. *Назначить обобщенную координату* означает задать: а) начало её отсчета, б) направление отсчета, в) способ отсчета. Обобщенные координаты часто имеют смысл неких расстояний или углов.

В.9. Число степеней свободы (подвижности) голономной (см. далее) механической системы - это количество её обобщенных координат.

В.10. Связи – ограничения (условия), накладываемые на движение механической системы. Эти ограничения могут быть заданы, например, графически в виде схематических рисунков или аналитически в виде неравенств или равенств – *уравнений связей*. Условия, благодаря которым множество точек объединяется в систему, характеризуют *внутренние* связи. Если на систему не наложены *внешние* связи, то она называется *свободной*. Связями (в узком смысле этого термина) называют также материальные тела, создающие ограничения движению изучаемой системы. Пусть механическая система состоит из n точек, движущихся в пространстве, и пусть связи заданы аналитически в виде l независимых уравнений связей, ограничивающих *положения* точек системы. Тогда число s степеней свободы системы будет равно

$$s = 3n - l.$$

♦ В более широком смысле число степеней свободы некоторого детерминистского объекта есть количество параметров, достоверно определяющих данный объект. Так, макросостояние заданного множества молекул, образующих идеальный газ, характеризуется тремя параметрами: температурой, давлением и объемом. Между этими параметрами есть связь, задаваемая объединенным газовым законом, так что число степеней свободы газа равно 2. Если на параметры наложить еще одну связь (напр., пусть давление $P = const$), то число степеней свободы будет равно 1 (изобарный процесс).

В.11. Задание движения механического объекта обычно означает задание кинематические уравнений его движения.

Кинематические уравнения движения механической системы – это уравнения, выражающие зависимость её обобщенных координат от времени. Количество уравнений движения равно числу степеней свободы объекта.

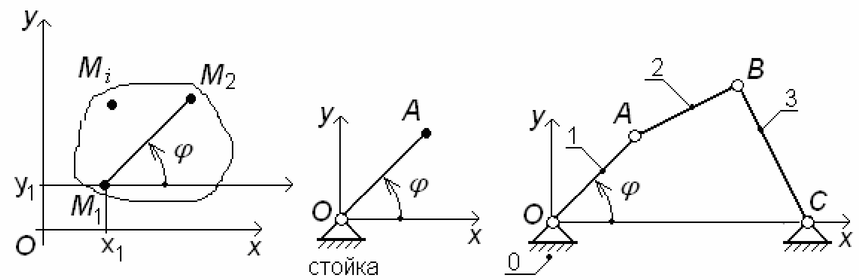
◙ К.1. ***Определим число степеней свободы плоской фигуры (плоского твердого тела, которое может двигаться в неподвижной плоскости). Назначить обобщенные координаты, задающие положение плоской фигуры.***

Рассмотрим простейшее твердое тело, состоящее из двух точек M_1 и M_2 (гантель), движущуюся по плоскости в координатной системе Oxy (рис.1, а). Расстояние между этим точками (обозначим его $L_{1,2}$) должно быть неизменно (см. п. В.4), т.е. во время движения гантели должно выполняться условие

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = L_{1,2}^2,$$

где x_1, y_1, x_2, y_2 - координаты точек. Это условие дает нам одно уравнение связи, и число степеней свободы гантели, движущейся в двумерном пространстве, будет равно

$$s = 2n - l = 2 \cdot 2 - 1 = 3.$$



а б в

Рис.1

Добавление в состав тела следующей точки M_i ($i = 3,4,\ldots$) не изменит числа степеней свободы: каждая пара «вновь приобретенных» координат x_i, y_i связывается двумя уравнениями, выражающими неизменность расстояний $L_{1,i}$ и $L_{2,i}$:

$$(x_1 - x_i)^2 + (y_1 - y_i)^2 = L_{1,i}^2; \quad (x_2 - x_i)^2 + (y_2 - y_i)^2 = L_{1,i}^2$$

.

♣ Докажите, что тогда расстояния между точками M_i будут однозначно выражаться через расстояния $L_{1,2}$, $L_{1,i}$ и $L_{2,i}$.

Так что независимых уравнений, выражающих внутренние связи (неизменность расстояний между точками плоской фигуры) будет $l = 2n - 3$. Позиция плоской фигуры вполне определяется положением гантели (или отрезка M_1M_2). Положение отрезка зададим координатами x_1, y_1 точки M_1, называемой далее полюсом, и углом φ, составляемым вектором $\overrightarrow{M_1M_2}$ с осью Ox. Величины x_1, y_1, φ могут быть приняты за обобщенные координаты плоской фигуры.

◙ К.2. ***Определим число степеней свободы коромысла (рис. 1,б) и механизма, называемого шарнирным четырехзвенником (рис. 1,в). Назначить обобщенные координаты.***

Механизмом принято называть искусственно созданную систему тел (звеньев), служащую для преобразования движения одних тел (ведущих звеньев) в требуемые движения других тел (ведомых звеньев). Неподвижное звено механизма называют стойкой. Траектории точек звеньев *плоского* механизма лежат в параллельных плоскостях. Рисунок кинематической схемы плоского механизма, графически описывающий его структуру и характер движения звеньев, содержит изображения звеньев как плоских фигур. Положение фигуры обычно задают как положение характерного ее отрезка. Звенья соединяются тем или иным способом друг с другом, образуя кинематические пары. Коромыслом называют звено плоского механизма, образующее со стойкой *вращательную* пару, т.е. способное поворачиваться относительно стойки вокруг неподвижной оси (имеющее *шарнирное* соединение со стойкой). Шарнирные соединения звеньев изображены на рис. 1 маленькими кружками; ось каждого шарнира предполагается проходящей через центр кружка перпендикулярно плоскости рисунка. Коромысло, способное поворачиваться на полный угол, называется кривошипом.

Коромысло OA, представим себе как плоскую фигуру, которая при свободном движении по плоскости xOy могла бы иметь $s_0 = 3$ степени свободы, но которая имеет неподвижную (общую со стойкой) точку O. Последнее условие можно выразить двумя уравнениями связи, задающими координаты полюса O:

$$x_O = 0; \quad y_O = 0.$$

Свободной остается координата φ, которую и примем за обобщенную. Число степеней свободы коромысла равно $s = s_0 - l = 1$.

Итак, если на механическую систему, имевшую s_0 степеней свободы, накладываются l связей, то новое число связей равно $s_0 - l$.

Шарнирный четырехзвенник включает в себя три плоские фигуры: $s_0 = 3 \cdot 3 = 9$. Условия шарнирных соединений подвижных звеньев со стойкой и друг с другом выражаются восемью уравнениями: $x_O = 0$; $y_O = 0$; $x_C = 0$; $y_C = 0$; $x_{A1} = x_{A2}$; $y_{A1} = y_{A2}$; $x_{B2} = x_{B3}$; $y_{B2} = y_{B3}$.

Число степеней свободы механизма $s = 9 - 8 = 1$. Угол φ примем за обобщенную координату механизма. Выражение вида $\varphi = \varphi(t)$

есть кинематическое уравнение движения механизма.

В.12. Сила - величина, характеризующая взаимодействие (взаимовлияние) механических объектов. Сила, действующая на механический объект со стороны другого объекта, - это вектор, имеющий величину, направление и точку приложения. В конкретном взаимодействии участвуют всегда агент и контрагент (см. третий закон Ньютона).

В.13. Положение механической системы. Состояние механической системы. Состояние равновесия механической системы

Положение механической системы задается набором значений координат ее точек: $x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots, z_n$ (или набором обобщенных координат системы $q_1, q_2, \ldots, q_S$). Состояние системы характеризуется совокупностью скоростей её точек $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{z}_n$ (или *обобщенных скоростей* $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_S$).

Состоянием равновесия механической системы будем называть длящееся некоторое конечное время состояние покоя системы, когда скорости всех ее точек остаются равными нулю. В течение этого времени *меры механического движения* (количество движения и кинетический момент, а также кинетическая энергия) не изменяются и равны нулю. *Положением равновесия* называют такое положение механической системы, в котором она способна оставаться (покоиться) бесконечно долго.

В.14. Три раздела теоретической механики

В разделе *«кинематика»* исследуется заданное движение механического объекта вне зависимости от сил, действующих на него. В разделе *«динамика»* исследуется взаимозависимость между силами, действующими на данный объект, и его движением. В разделе *«статика»* исследуется состояние равновесия объекта в зависимости от действующих на него сил.

1. КИНЕМАТИКА

1.1. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

1.1.1.Способы задания движения точки: векторный, координатный, естественный.

1.1.2. Кинематические параметры точки - это величины, определяющие а) положение (перемещение) точки, б) скорость, в) ускорение точки. Аналогичные кинематические параметры вращающегося твердого тела - это угол его поворота, угловая скорость, угловое ускорение тела.

1.1.3. Траектория точки - геометрическое место положений точки в пространстве, или годограф («рисунок пути») радиус-вектора точки.

1.1.4. Вектор перемещения точки

Пусть движение точки происходит в интервале времени $\left[t_1;\, t \;\; = t_1 + \Delta t\right]$, и пусть моменту времени t_1 соответствует положение M_1 точки (рис. 2), а моменту t - положение M .

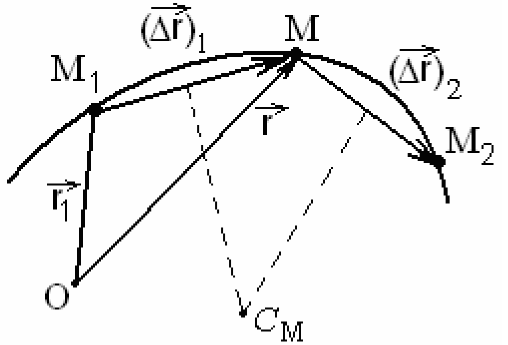


Рис. 2

Вектор перемещения точки за время $\left[t_1; t\right]$ - вектор $(\Delta\vec{r})_1$, имеющий начало в точке M_1 и конец – в точке M . При векторном задании движения точки вектор перемещения есть «прирост» радиус-вектора точки за время Δt :

$$(\Delta\vec{r})_1 = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_1) = \vec{r} - \vec{r}_1.$$

1.1.5. Скорость точки

Вектор средней скорости на участке M_1M : $\vec{v}_{CP,1} = \dfrac{(\Delta\vec{r})_1}{\Delta t}$

Вектор мгновенной скорости в момент времени t :

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\Delta\vec{r})_1}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}.$$

Здесь предыдущая точка M_1 (рис. 2) стягивается в рассуждениях исследователя к последующей точке M , т.е. скорость в момент t определена как производная от радиус-вектора *слева*. Когда последующая точка стягивается к предыдущей точке, то имеем производную *справа*. Если производные от радиус-вектора в момент t_* справа и слева не совпадают, то это следствие *удара* по материальной точке.

Вектор средней скорости $\vec{v}_{CP,1}$ на участке M_1M направлен вдоль секущей M_1M ; вектор средней скорости $\vec{v}_{CP,2}$ на участке MM_2 направлен вдоль секущей MM_2. Вектор мгновенной скорости в момент времени t направлен по касательной к траектории, проходящей через точку M .

Величина скорости (модуль вектора $\vec{v}$):

$$v(t) = |\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t)}.$$

1.1.6. Ускорение точки

Рассмотрим три последовательных положения точки на траектории, соответствующие моментам времени t_1, $t = t_1 + \Delta t$, $t_2 = t + \Delta t$ (рис. 2). Определим среднее ускорение на участке M_1MM_2:

$\vec{a}_{CP} = \dfrac{\Delta\vec{v}_{CP}}{2 \cdot \Delta t} = \dfrac{\vec{v}_{CP,2} - \vec{v}_{CP,1}}{2 \cdot \Delta t}$. Вектор среднего ускорения лежит в плоскости треугольника M_1MM_2 и направлен в сторону вогнутости траектории. Вектор мгновенного ускорения движущейся точки в положении M равен $\vec{a}(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \vec{a}_{CP} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$ и лежит в соприкасающейся плоскости. Соприкасающуюся к траектории в точке M плоскость представим себе как предельное положение плоскости треугольника ΔM_1MM_2 при условии $\Delta t \to 0$, т.е. при $M_1, M_2 \to M$.

1.1.7. Путь точки на заданном промежутке времени $[t_1; t_2]$

$$s_{1-2} = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$ – длина пройденной дуги траектории.

1.1.8. Исследовать траекторию точки при координатном способе задания ее движения бывает удобно, если исключить время как параметр из уравнений движения и составить таким способом уравнения траектории в виде зависимостей между координатами точки.

1.1.9. Скорость точки при задании ее движения в декартовой системе координат

Проекции скорости на оси координат:

$$v_x = \dot{x}; \quad v_y = \dot{y}; \quad v_z = \dot{z}.$$

Составляющие скорости по осям координат:

$$\vec{v}_x = v_x\vec{i}; \quad \vec{v}_y = v_y\vec{j}; \quad \vec{v}_z = v_z\vec{k}.$$

Вектор скорости: $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z$.

Величина (модуль вектора) скорости:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

1.1.10. Ускорение точки при картезианском задании ее движения

Проекции ускорения на оси координат:

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}; \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}; \quad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}.$$

1.1.11. Естественный *(натуральный)* ***способ задания движения точки*** - это такой способ задания движения, при котором задается траектория точки и закон движения точки по траектории. Закон движения может выражать зависимость дуговой координаты (или скорости, или касательного ускорения) от времени. Величина дуговой (естественной) координаты является длиной дуги траектории и измеряется в метрах. Назначение дуговой координаты задает порядок точек на траектории, т.е. ее ориентацию.

1.1.12. Скорость точки при естественном задании движения определяется формулой $\vec{v} = \dot{\sigma}\vec{\tau}_0$.

Здесь σ – дуговая координата, а $\vec{\tau}_0 = \dfrac{d\vec{r}}{d\sigma}$ - орт касательной в данной точке траектории, направленный в сторону возрастания значений этой координаты. Вдоль этого орта направляют ось касательной $M\tau$ *естественного трехгранника* (tangenta (лат.) – касательная; tacto – прикасаюсь, трогаю; «Noli me tangere!» - «Не тронь меня!»).

1.1.13. Ускорение точки при естественном задании движения складывается из *естественных* составляющих (касательного и нормального) ускорения: $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$.

Вектор и величина касательного ускорения ищется по формулам

$$\vec{a}_\tau = \ddot{\sigma}\vec{\tau}_0; \quad |a_\tau| = |\ddot{\sigma}| = |\dot{v}|.$$

Выражение a_τ означает проекцию ускорения на касательную к траектории, она может быть отрицательной, положительной или равна нулю.

Если ориентация траектории не задана, а дана скорость точки, то ось касательной направляют по вектору скорости, и выражение $a_\tau = \dot{v}$ выражает проекцию ускорения на направление скорости.

Нормальное ускорение определяется формулой

$$\vec{a}_n = \frac{\dot{\sigma}^2}{\rho}\vec{n}_0 = \frac{v^2}{\rho}\vec{n}_0.$$

Здесь ρ – радиус кривизны траектории в расчетной её точке, $\vec{n}_0$ - орт нормали к траектории, вдоль которого направляют ось Mn нормали. Эта ось лежит в соприкасающейся плоскости и направлена перпендикулярно касательной в сторону вогнутости траектории. Проекция ускорения на нормаль не может быть отрицательна.

1.1.14. Кривизна и радиус кривизны траектории

Кривизна кривой $k = \lim\limits_{\Delta\sigma \to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta\sigma}\right| = \left|\frac{d\varphi}{d\sigma}\right|$, где $\Delta\varphi$ – угол поворота касательной к кривой на участке длиной $|\Delta\sigma|$.

Радиус кривизны - величина, обратная величине кривизны: $\rho = \frac{1}{k}$.

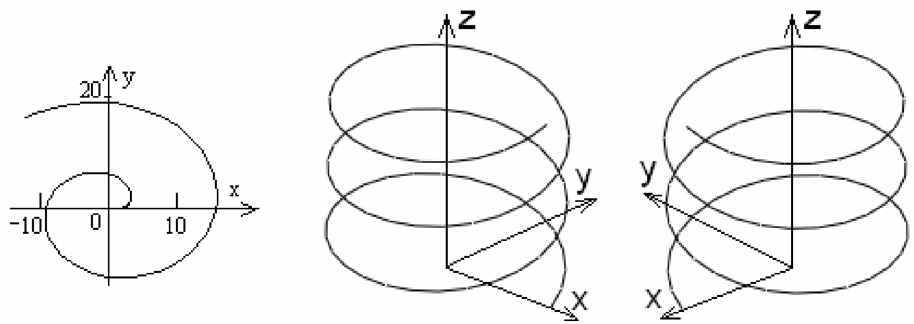
Радиус кривизны окружности есть радиус этой окружности; радиус кривизны прямой бесконечно велик. Радиус кривизны измеряется в *метрах*.

Точка нормали, отстоящая от данной точки траектории в направлении вогнутости кривой на расстояние ρ, называется *центром кривизны* кривой, соответствующим данной точке кривой. Геометрическое место центров кривизны образует линию - *эволюту* исходной кривой (evolutus (лат.)– развернутый; voluto – катать, катить). Исходная кривая является *эвольвентой* относительно своей эволюты (evolventis – разворачивающий).

♦ Если аппроксимировать траекторию на участке M_1MM_2 (рис. 1) дугой окружности, то её центр лежит в точке C_M пересечения перпендикуляров, восстановленных из середин хорд M_1M и MM_2. Предельное положение точки C_M при условии $\Delta t \to 0$, когда $M_1, M_2 \to M$, есть центр кривизны траектории *в точке М.*

Если с катушки радиуса *R* сматывать нить, сохраняя отмотанную часть прямой, то конец нити опишет одну из эвольвент окружности, а именно, соответствующую той точке, с которой начал сматываться конец нити. На рис. 3,а изображена эвольвента окружности радиуса $R = 2$, соответствующая крайней правой начальной точке при сматывании нити против часовой стрелки. Параметрические уравнения этой эвольвенты

$$x = R\cos t + Rt\sin t; \; y = R\sin t - Rt\cos t.$$



а б в

Рис. 2

При $t \to \infty$ эта кривая приближается к спирали Архимеда, уравнение которой в полярных координатах $r = R(\varphi + \frac{\pi}{2})$.

Зубцы колес большинства зубчатых передач имеют эвольвентный профиль, благодаря чему минимизируется скольжение зубца по зубцу и упрощается изготовление самих зубчатых колес. Основу профилей зубцов составляют эвольвенты («развертки») *основных окружностей* (см. «Теорию машин и механизмов») зацепляющихся колес.

1.1.15. Естественный трехгранник (натуральный триэдр) - трехгранник, построенный на осях касательной, нормали и бинормали. Орт бинормали определяется как $\vec{b}_0 = \vec{\tau}_0 \times \vec{n}_0$; тогда $\vec{\tau}_0 = \vec{n}_0 \times \vec{b}_0$ и $\vec{n}_0 = \vec{b}_0 \times \vec{\tau}_0$. Соприкасающаяся плоскость проходит через касательную и нормаль. Плоскость, содержащая нормаль и бинормаль, называется нормальной плоскостью, а плоскость, содержащая бинормаль и касательную, - спрямляющей. Естественный трехгранник ориентирован в пространстве соответственно форме кривой. Информация о форме (о *внутренней* геометрии кривой) может быть использована при исследовании движения материальной точки по данной кривой.

Пространственной кривая независимо от её расположения относительно окружающих предметов может быть описана путем задания в каждой точке σ кривизны k *и кручения* κ (греч. «каппа») кривой:

$$k = k(\sigma); \;\; \kappa = \kappa(\sigma).$$

Величина кручения $|\kappa| = \lim\limits_{\Delta\sigma \to 0} \left|\dfrac{\Delta\psi}{\Delta\sigma}\right| = \left|\dfrac{d\psi}{d\sigma}\right|$, где $\Delta\psi$ – угол поворота бинормали к кривой на участке длиной $|\Delta\sigma|$.

Имеют место формулы Серре – Френе:

$$\frac{d\vec{\tau}_0}{d\sigma} = k\vec{n}_0; \; \frac{d\vec{b}_0}{d\sigma} = -\kappa\vec{n}_0.$$

Кривизна – положительный параметр. Кручение «правой» винтовой линии, изображенной на рис. 3, б, положительно. Кручение «левой» (рис. 3, в) – отрицательно.

1.1.16. Равнопеременное движение точки определяется условием

$a_\tau = const \neq 0$; тогда имеют место формулы:

$$v_\tau = v_{\tau,0} + a_\tau t, \quad \sigma = \sigma_0 + v_{\tau,0} t + 0{,}5\, a_\tau t^2.$$

1.2. Простейшие движения твердого тела

1.2.1. Классификация движений твердого тела

Поступательное, вращательное, плоскопараллельное, сферическое, произвольное движение (пространственное движение свободного тела).

Свободное тело имеет 6 степеней свободы.

1.2.2. Поступательное движение твердого тела - это такое движение тела, при котором отрезок прямой, соединяющий любые две точки тела, остается параллельным отрезку, соединявшему их в начальный момент времени. Поступательно движущееся тело имеет три («поступательные») степени свободы. Обобщенными координатами могут служить координаты произвольной точки тела, выбранной за полюс. Скорости разных точек тела равны между собой как векторы и равны скорости полюса. Ускорения разных точек тела также равны между собой.

1.2.3. Вращательное движение твердого тела - это такое движение пространственного тела, при котором две его точки неподвижны. Прямая, проходящая через эти точки, является осью вращения тела. Вращающееся тело имеет одну степень свободы; обобщенная координата φ – угол поворота тела вокруг оси, измеряемый в естественных единицах (радианах). Направление оси Oz вращения тела обычно связывают с направлением отсчета угла φ правилом правого винта.

1.2.4. Угловая скорость вращающегося твердого тела

Величина средней угловой скорости $\omega_{CP} = \dfrac{|\Delta\varphi|}{\Delta t}$.

Вектор мгновенной угловой скорости равен $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{k}$, где $\vec{k}$ - орт оси вращения Oz (рис. 4). Вектор угловой скорости вращающегося тела направлен вдоль оси вращения так, что его направление и направление вращения тела связаны между собой *правилом правого винта* (или правилом часовой стрелки: если смотреть навстречу вектору $\vec{\omega}$, то вращение тела видится происходящим против часовой стрелки). Величина угловой скорости ω имеет размерность *рад/с*. Если она выражена как число *n* оборотов в минуту, то перевод в *рад/с* производится по формуле $\omega = \dfrac{\pi n}{30}$.

1.2.5. Вектор углового ускорения тела в любом случае его движения определяется как производная по времени от вектора его угловой скорости: $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$. При вращательном движении вокруг неподвижной оси $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\varphi}\,\vec{k}$.

1.2.6. Равнопеременное вращение тела определяется условием $\varepsilon_z = const$;

тогда $\omega_z = \omega_{z,0} + \varepsilon_z t;\quad \varphi = \varphi_0 + \omega_{z,0}t + \dfrac{\varepsilon_z t^2}{2}$.

При *равномерном* вращении $\varepsilon = 0$.

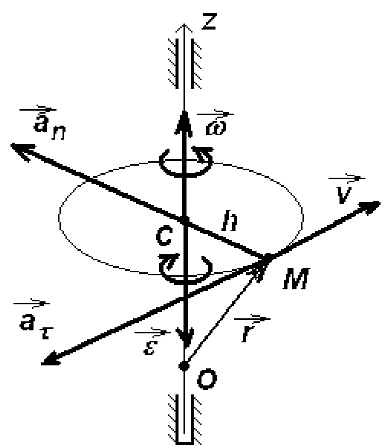


Рис. 4

1.2.7. Траектория точки вращающегося тела - окружность, радиус которой h есть расстояние от этой точки до оси вращения. Чтобы найти центр этой окружности, надо из заданной точки тела опустить перпендикуляр на ось вращения. Плоскость окружности перпендикулярна оси вращения.

1.2.8. Скорость точки вращающегося тела определяется формулой Эйлера-Пуассона: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ (см. рис. 4).

Скорость точки направлена по касательной к окружности радиуса h в сторону вращения тела. Величина скорости $v = \omega h$. Величины скоростей точек пропорциональны расстояниям от этих точек до оси вращения тела.

1.2.9. Ускорение точки вращающегося тела - это сумма векторов касательного (вращательного) и нормального (центростремительного) ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n,$$

где $\vec{a}_\tau = \vec{a}_{вр} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$, $\vec{a}_n = \vec{a}_ц = \vec{\omega} \times \vec{v}$.

Величины этих ускорений ищутся по формулам

$$|a_\tau| = \varepsilon h,\ \ a_n = \omega^2 h.$$

Здесь ε – величина углового ускорения тела.

Касательное ускорение точки тела направлено по касательной к траектории точки тела в сторону углового ускорения. Нормальное ускорение точки направлено к центру её траектории, т.е. по перпендикуляру, опущенному из точки тела на ось вращения.

1.2.10. Передаточная формула для зубчатой передачи. Редукторы. Формула Виллиса

Рассмотрим цилиндрическую зубчатую передачу (рис. 5,а). Величины угловых скоростей связаны формулой

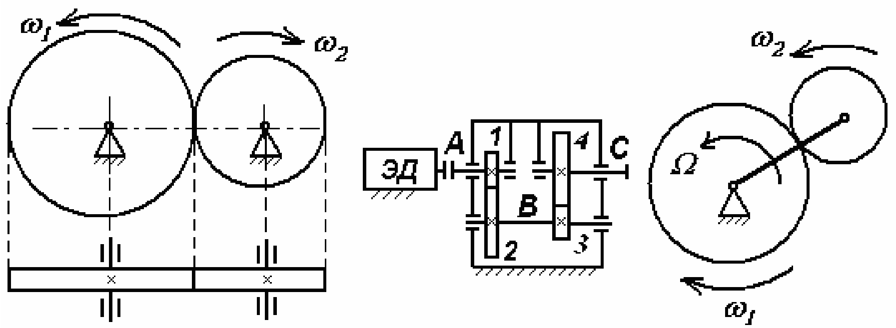
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Буквами *R* обозначены радиусы колес, буквами *z* – числа зубцов колес.

Приведенная формула справедлива и для конической передачи, а также для ременной и цепной передач. В случае ременной передачи R означает радиус шкива, а в случае цепной передачи z – число зубцов звездочки. Формула, учитывающая знаки проекций угловых скоростей колес на ось $O\zeta$, коллинеарную осям вращения колес, выглядит так:

$$\frac{\omega_{1,\zeta}}{\omega_{2,\zeta}} = p\frac{R_2}{R_1} = p\frac{z_2}{z_1}.$$

Здесь p – признак зацепления колес. При внутреннем зацеплении $p = +1$, при внешнем $p = -1$.



а б в

Рис. 5

Из зубчатых колес может быть собран *редуктор* – механизм, служащий для передачи вращения от одного вала к другому (reductio (лат.) – возвращение, приведение назад). На рис. 5,б изображена кинематическая схема двухступенчатого редуктора. Редуктор является понижающим, если угловая скорость выходного вала меньше, чем входного, т.е. если величина $i_{A,C} = \dfrac{\omega_A}{\omega_C} = \dfrac{z_2 z_4}{z_1 z_3} > 1$. Данный редуктор является коаксиальным (соосным): оси входного A и выходного C валов совпадают. При этом направление вращения этих валов одно и то же, так что данный редуктор является нереверсивным.

Величины $i_{A,C}$ и $i_{C,A} = \dfrac{1}{i_{A,C}}$ называются передаточными отношениями редуктора. Величина $u = \max(i_{A,C}; i_{C,A})$ называется передаточным числом редуктора.

Для планетарной передачи (рис. 5, в) справедлива формула Виллиса:

$$\frac{\omega_{1,\zeta} - \Omega_\zeta}{\omega_{2,\zeta} - \Omega_\zeta} = p\frac{z_2}{z_1},$$

где Ω_ζ – проекция угловой скорости водила (кривошипа) на ось его вращения $O\zeta$.

1.3. Сложное движение точки

1.3.1. Описание сложного движения точки

Пусть имеются две разные системы отсчета, относительно которых исследуется движение некоторой материальной точки M, причем одна из этих систем отсчета считается неподвижной, или абсолютной, а другая является подвижной (в качестве абсолютной обычно выступает инерциальная система отсчета). Движение точки M относительно неподвижной системы отсчета называется *абсолютным* движением этой точки, а движение относительно подвижной системы отсчета - *относительным*. Сложным движением точки M называется такое абсолютное ее движение, которое можно представить как *суперпозицию* (композицию, результат «сложения») относительного и переносного её движений. При этом *переносным* называется движение точки M вместе с подвижной системой отсчета относительно неподвижной.

1.3.2. Относительная, переносная и абсолютная скорости точки

Относительная (relatif (фр.)) скорость точки $\vec{v}_r$ - это её скорость относительно подвижной системы отсчета (рассчитанная при «замороженном» переносном движении).

Переносная (emporter) скорость $\vec{v}_e$ – скорость, которой обладала бы точка при «замороженном» относительном движении; иначе говоря, это скорость того пункта подвижной системы отсчета, в котором находится точка в расчетный момент времени.

Абсолютная (absolu) скорость $\vec{v}_a$ – скорость точки относительно неподвижной системы отсчета.

1.3.3. Теорема о сложении скоростей при сложном движении точки

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e.$$

1.3.4. Теорема Кориолиса о сложении ускорений

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_{cor},$$

где $\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$ - ускорение Кориолиса, $\vec{\omega}_e$ - вектор угловой скорости подвижной системы отсчета. Если этот вектор коллинеарен вектору относительной скорости или равен нулю (при поступательном движении подвижной системы отсчета), то кориолисово ускорение отсутствует.

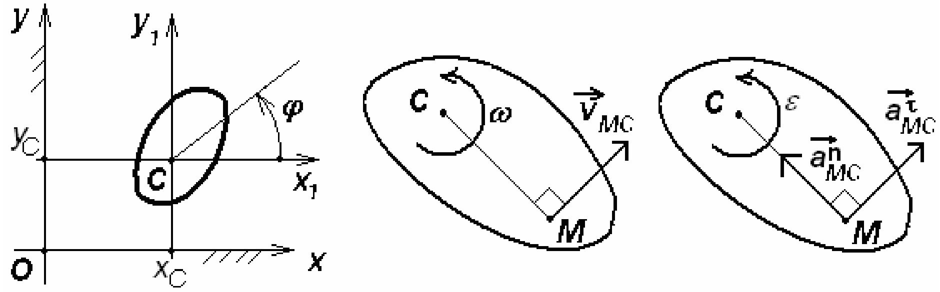
1.4. Плоское движение твердого тела

1.4.1. Описание плоского (плоскопараллельного) движения (ППД) ***твердого тела***

ППД - это такое движение тела, при котором его точки движутся в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости. Моделью ППД служит движение плоской фигуры. Плоская фигура, двигаясь в неподвижной плоскости, имеет 3 степени свободы. Её обобщенные координаты – две координаты x_C, y_C полюса *C* (рис. 6,а) и угол φ поворота фигуры вокруг полюса (вокруг оси *Cz*, проходящей через полюс и перпендикулярной плоскости движения).

Движение плоской фигуры можно рассматривать как сложное движение тела, являющимся результатом сложения поступательного движения плоской фигуры вместе с полюсом *C* и её вращательного движения вокруг полюса *C*.

Поступательное движение фигуры вместе с полюсом рассматривается как переносное, вращательное вокруг полюса – как относительное её движение.



а б в

Рис. 6

1.4.2. Скорость точки плоской фигуры:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_C + \vec{v}_{MC}.$$

Здесь $\vec{v}_C$ - скорость полюса *C*, $\vec{v}_{MC} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{CM}$ - скорость расчетной точки *M* при вращательном движении плоской фигуры вокруг полюса *C*. Скорость $\vec{v}_{MC}$ направлена перпендикулярно отрезку *CM* в сторону вращения точки *M* вокруг полюса *C* (рис. 6,б). Её величина равна

$$v_{MC} = \omega \cdot CM,$$

где ω – величина угловой скорости плоской фигуры. Вектор $\vec{\omega}$ направлен перпендикулярно плоскости движения.

Проекции скоростей двух точек твердого тела на ось, проходящую через эти точки, равны между собой.

1.4.3. Ускорение точки плоской фигуры равно сумме векторов ускорения полюса и ускорения этой точки при её вращении вокруг полюса:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_C + \vec{a}^{\tau}_{MC} + \vec{a}^{n}_{MC},$$

где $\vec{a}^{\tau}_{MC} = \vec{a}^{вр}_{MC} = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{CM}, \quad \vec{a}^{n}_{MC} = \vec{a}^{ц}_{MC} = \vec{\omega} \times \vec{v}_{MC}.$

Касательное (вращательное) ускорение $\vec{a}_{MC}^{\tau}$ направлено перпендикулярно отрезку MC в сторону ускорения вращения плоской фигуры вокруг полюса C (рис. 6,в). Его величина равна $\left|a_{MC}^{\tau}\right| = \varepsilon \cdot CM$.

Вектор нормального (центростремительного) ускорения $\vec{a}_{MC}^{n}$ направлен от точки M к полюсу C; его величина равна

$$a_{MC}^{n} = \omega^2 CM.$$

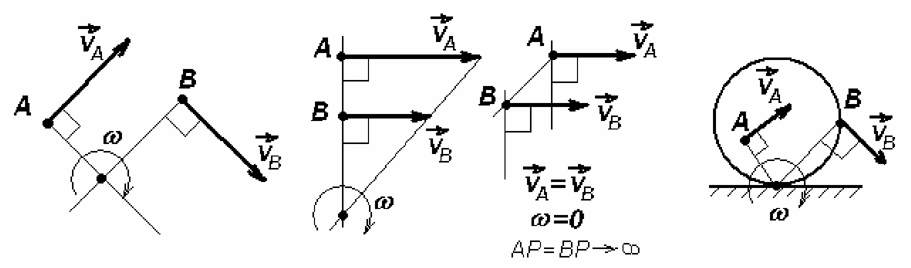
1.4.4. Мгновенный центр скоростей плоской фигуры (МЦС) - это такая её точка P, скорость которой в данное мгновение равна нулю.

Если найдено положение МЦС (точки P), то движение плоской фигуры в каждый момент времени можно рассматривать как мгновенно-вращательное вокруг центра P. Тогда скорость точки A плоской фигуры вычисляется по формуле $v_A = \omega \cdot AP$ и направлена перпендикулярно отрезку AP в сторону вращения плоской фигуры вокруг МЦС. Величины скоростей точек плоской фигуры пропорциональны расстояниям от этих точек до МЦС:

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{AP}{BP}.$$

Положение МЦС можно найти на пересечении перпендикуляров к скоростям двух её точек (A и B), восстановленных из этих точек (рис. 7,а). Перпендикуляры могут совпадать (рис. 7,б) или не пересекаться. В последнем случае (рис. 7в) МЦС находится в бесконечно удаленной точке, скорости точек плоской фигуры одинаковы, угловая скорость её равна нулю.

Положение МЦС может определяться и непосредственно из специального кинематического условия движения. Например, если колесо катится без скольжения по неподвижной направляющей, то мгновенный центр скоростей находится в точке касания колеса с направляющей (рис. 7,г).



а б в г

Рис.6

1.5. Сложение вращений твердого тела

1.5.1. Сложение вращений твердого тела вокруг пересекающихся осей

Пусть твердое тело совершает вращательное движение вокруг подвижной оси с угловой скоростью $\vec{\omega}_r$, а эта подвижная ось вращается вокруг неподвижной оси с угловой скоростью $\vec{\omega}_e$ так, что оси пересекаются. Тогда абсолютная угловая скорость тела определяется формулой $\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e$.

Вектор $\vec{\omega}_a$ меняет величину и направление. Прямая, вдоль которой он в данный момент времени направлен, называется мгновенной осью вращения тела.

1.5.2. Сложение вращений твердого тела вокруг параллельных осей Если оси относительного и переносного вращения параллельны друг другу, то тело совершает плоское движение, и его угловая скорость $\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e$.

1.5.3. Сферическое движение твердого тела - это такое его движение в пространстве, при котором одна точка тела остается неподвижно. Таковым является, например, движение волчка (рис. 8).

Траектория каждой точки тела лежит на сфере с центром в неподвижной точке ***O***. Моделью сферического движения может служить движение сферической фигуры по сфере. Сферическое движение в общем случае есть результат сложения его вращений вокруг трех осей. Тело имеет 3 степени свободы. Обобщенными координатами могут служить углы Эйлера: угол собственного вращения (ротации) φ, угол прецессии ψ и угол нутации θ.

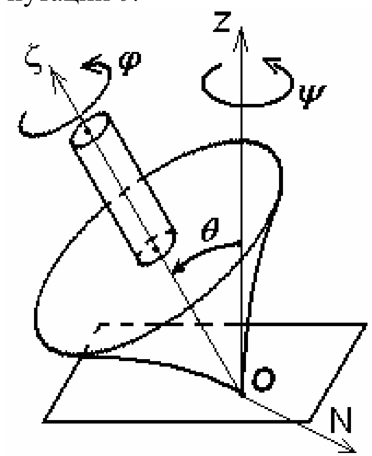


Рис.8

Термин «прецессия» (предшествование) происходит из астрономии: благодаря прецессии земной оси имеет место ежегодное предварение равноденствий примерно на 50 секунд.Период этой прецессии 26 тысяч лет. Термин «нутация» происходит от латинского глагола «качаться», «дрожать». Нутация тела совершается вокруг *линии узлов* ***ON***. Направляющий орт $\vec{\nu}$ линии узлов задается выражением $\vec{\nu} = \vec{k} \times \vec{\kappa}$, где $\vec{k}$ - орт неподвижной оси Oz, $\vec{\kappa}$ - орт подвижной оси $O\zeta$ (оси собственного вращения), связанной с телом.

1.5.4. Скорость и ускорение точки тела при сферическом движении

Угловая скорость тела равна векторной сумме угловых скоростей ротации, прецессии и нутации:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_a = \dot{\vec{\varphi}} + \dot{\vec{\psi}} + \dot{\vec{\vartheta}}.$$

Линия действия вектора $\vec{\omega}$ - мгновенная ось вращения. Скорости ее точек в данное мгновение равны нулю. Движение плоской фигуры (см. п. 1.4.1) можно рассматривать как предельный случай движения сферической фигуры по сфере, радиус которой бесконечно велик. Скорость точки тела при сферическом движении определяется по формуле

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r},$$

где $\vec{r}$ - радиус-вектор точки, проведенный из неподвижного полюса. Скорость направлена по касательной к окружности, центром которой является основание перпендикуляра, опущенного из точки на мгновенную ось.

Ускорение точки тела равно

$$\vec{a} = \vec{a}_\omega + \vec{a}_\varepsilon = \vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}.$$

«Осестремительное» ускорение $\vec{a}_\omega$ направлено к мгновенной оси вдоль упомянутого перпендикуляра.

1.5.5. Движение свободного твердого тела

Для исследования свободного движения тела некоторая точка *C* тела выбирается в качестве полюса. С полюсом *C* связывают подвижную систему отсчета $Cx_1y_1z_1$, движущуюся поступательно. Движение тела рассматривают как сложное его движение, состоящее из поступательного движения вместе с полюсом *C* и сферического движения вокруг полюса относительно системы отсчета $Cx_1y_1z_1$. Обобщенные координаты тела – три координаты полюса *C* и три угла Эйлера. Скорость и ускорение точки тела определяются по формулам, которые выглядят так же, как формулы для скорости и ускорения точки плоской фигуры (см. п. 1.4.4):

$$\vec{v}_M = \vec{v}_C + \vec{v}_{MC}, \quad \vec{v}_{MC} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{CM};$$

$$\vec{a}_M = \vec{a}_C + \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{CM} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{MC}.$$

2. Введение в динамику. Статика твердого тела

2.1. Введение в динамику

2.1.1. Аксиомы классической механики

А) Первый закон Ньютона (принцип инерции).

Б) Второй закон Ньютона в общем виде формулируется по отношению к материальной точке переменной массы

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}.$$

Основное уравнение динамики материальной точки постоянной массы:

$$m\vec{a} = \vec{F}.$$

$\vec{F}$ – сила, действующая на точку со стороны какого-то корпускулярного тела или силового поля (fors (лат.) – неодолимая сила, случай; fortis – сильный).

Второй закон Ньютона, как и другие уравнения динамики, формулируется («по умолчанию») относительно инерциальной системы отсчета (существование таких систем отсчета постулируется первым законом Ньютона). В качестве инерциальной системы берут обычно систему отсчета, связанную с Землей («геоцентрическая» система отсчета). С большей точностью второй закон Ньютона выполняется по отношению к системе отсчета, связанной с плоскостью эклиптики («гелиоцентрическая»), и еще точнее - относительно системы отсчета, связанной с «удаленными звездами».

В) Дополнение ко второму закону Ньютона (принцип независимости действия сил). Следствие: запись основного уравнения динамики точки в виде

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i.$$

Г) Третий закон Ньютона (принцип соответствия действия и

противодействия): силы взаимодействия между материальными точками 1 и 2 связаны уравнением $\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$, причем эти силы имеют общую линию действия, проходящую через точки 1 и 2.

Простейшими следствиями законов Ньютона являются теоремы динамики. Они выражают связь между *мерами механического движения* и соответствующими им *мерами действия сил.* Теоремы динамики являются формами законов сохранения (импульса, момента импульса и энергии). Законы сохранения в свою очередь отражают свойства симметрии пространства и времени классической механики: однородность пространства, изотропность пространства, однородность времени.

2.1.2. Классификация сил, действующих на точки механической системы

А) Задаваемые («активные») силы и реакции связей.

Задаваемые – силы, действующие на точки исследуемой механической системы со стороны тех тел или силовых полей, которые непосредственно не ограничивают подвижность системы. Активная сила задается или непосредственно некой инструкцией, или указанием на какой-то физический закон (являющийся следствием не законов Ньютона, а иной физической теории).

Реакции связей - это силы, характеризующие действие связей на исследуемый объект. В задачах механики реакции связей обычно являются неизвестными величинами.

Б) Внешние и внутренние силы

Внешние силы ($\vec{F}^{E}$; exterior (лат.) - внешний) – это силы, действующие на систему со стороны тех механических объектов, которые не входят в состав этой системы.

Внутренние силы ($\vec{F}^{I}$; interior - внутренний) – это силы взаимодействия между фрагментами данной механической системы.

Помимо вышеупомянутых двух основных способов классификации, в частных ситуациях применяют и иные. Так, например, силы, действующие на сплошное (континуальное) тело, подразделяются на объёмные и поверхностные, сосредоточенные силы и распределенные нагрузки.

2.1.3. Момент вектора относительно полюса (механический момент)

Момент вектора $\vec{F}$ относительно полюса *O* определяется выражением

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Здесь $\vec{r}$ - радиус-вектор, проведенный из полюса *O* в точку приложения вектора $\vec{F}$ (рис. 9).

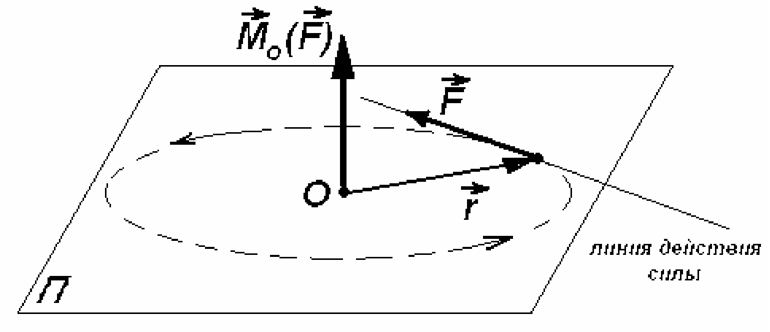


Рис. 9

Латинское слово «момент» означает некое действующее начало, существенное качество какого-то явления. Момент силы характеризует вращательный эффект действия силы. Вектор момента силы направлен перпендикулярно плоскости *П*, содержащей полюс и линию действия силы $\vec{F}$ согласно правилу правого винта (линия действия силы – это прямая, вдоль которой направлен вектор силы).

Величина момента силы равна произведению величины силы на плечо:

$$M_O(\vec{F}) = F\,h.$$

Плечо h вектора силы $\vec{F}$ относительно полюса *O* – это *расстояние* от полюса до линии действия силы. Чтобы найти плечо, надо опустить из полюса перпендикуляр на линию действия силы.

Аналогично определяется момент вектора $m\vec{v}$ количества движения точки относительно полюса («кинетический момент»):

$$\vec{K}_O = \vec{M}_O(m\vec{v}) = \vec{r} \times m\vec{v}\,.$$

Пусть F_x, F_y, F_z - декартовы проекции вектора $\vec{F}$, а *x, y, z* - проекции радиус-вектора (то есть координаты точки приложения силы). Тогда момент вектора относительно начала координат

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec{i}\,(yF_z - zF_y) + \vec{j}\,(zF_x - xF_z) + \vec{k}\,(xF_y - yF_x).$$

2.1.4. Момент вектора $\vec{F}$ относительно оси Oz

- это проекция момента относительно полюса *O* на ось *Oz*, проходящую через данный полюс:

$$M_{Oz}(\vec{F}) = M_z(\vec{F}) = (\vec{M}_O(\vec{F}))_{Oz}.$$

Чтобы найти момент вектора $\vec{F}$ относительно оси *Oz* графоаналитическим способом, воспользуемся следующим алгоритмом:

1) строим плоскость *П* (рис. 10), перпендикулярную оси *Oz* (точка *O* –точка их пересечения);
2) строим проекцию $\vec{F}_\Pi$ вектора $\vec{F}$ на плоскость *П*;
3) находим плечо h вектора $\vec{F}_\Pi$ относительно полюса *O* и величину момента $M_O(\vec{F}_\Pi) = F_\Pi h$;
4) Моменту вектора $\vec{F}$ относительно оси *Oz* приписываем значение

$$M_{Oz}(\vec{F}) = \pm F_\Pi h.$$

Знак момента определяется по правилу правого винта (часовой стрелки): если направление вектора $\vec{M}_O(\vec{F}_\Pi)$ совпадает с направлением оси *Oz*, то «+», иначе «-».

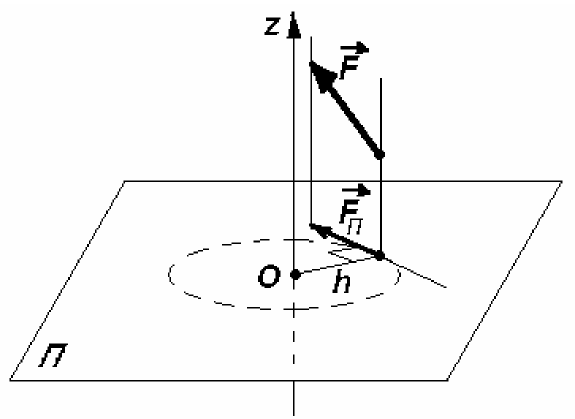


Рис. 10

Момент вектора относительно оси равен нулю, если вектор и ось компланарны (линия действия вектора параллельна оси или пересекает её).

2.1.5. Главный вектор и главный момент системы сил

Множество сил $\{\vec{F}_i\}$ (i = 1,2,…, n), приложенных к точкам механической системы, называют *системой сил.*

Главный вектор системы сил: $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i.$

Главный момент системы сил относительно данного полюса *O:*

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i\ .$$

Главный вектор и главный момент системы внутренних сил равны нулю (следствие третьего закона Ньютона).

2.1.6. Меры механического движения

А) *Количество движения* материальной точки $\vec{Q} = m\vec{v}$.

Количество движения механической системы, состоящей из n точек:

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^{n} \vec{Q}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i .$$

Количество движения механической системы можно найти как произведение общей массы системы на скорость центра масс (см. далее).

Б) *Кинетический момент* материальной точки относительно неподвижного полюса *O* (момент количества ее движения относительно полюса):

$$\vec{K}_0 = \vec{M}_0(\vec{Q}) = \vec{r} \times m\vec{v}.$$

Кинетический момент механической системы относительно полюса *O*

$$\vec{K}_O = \sum \vec{K}_{O,i} = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i.$$

В) *Кинетическая энергия* материальной точки

$$T = E_K = \frac{1}{2}\vec{Q}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v} = \frac{mv^2}{2}.$$

Кинетическая энергия механической системы

$$T = \sum T_i = \sum \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Формулы для мер механического движения механической системы выражают существенное свойство *меры* множества – ее аддитивность (мера движения механической системы есть *сумма* мер движения фрагментов системы).

2.1.7. Меры действия сил

А) *Импульс силы*

Элементарный импульс силы (импульс действия силы за бесконечно малое время dt): $d\vec{S} = \vec{F}\,dt.$

Суммарный элементарный импульс множества сил, приложенных к точкам механической системы:

$$d\vec{S} = \sum d\vec{S}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i dt = \vec{F}^E \, dt,$$

где $\vec{F}^E$ - главный вектор системы внешних сил.

Импульс силы $\vec{F}$ за промежуток времени $[t_1; t_2]$ равен

$$\vec{S}_{1-2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt.$$

Б) *Момент силы* относительно полюса или оси (см. п. 2.1.4)

В) *Работа и мощность силы*

Элементарная работа силы $\vec{F}$ на бесконечно малом перемещении $d\vec{r}$ точки приложения силы - скалярное произведение векторов $\vec{F}$ и $d\vec{r}$:

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cos\alpha \, dr = F_x dx + F_y dy + F_z dz,$$

где α - угол между векторами $\vec{F}$ и $d\vec{r}$.

Работа на «конечном» перемещении точки из положения M_1 на траектории в положение M_2 есть криволинейный интеграл *второго рода*:

$$A_{1-2} = \int_{(M_1)}^{(M_2)} \delta A = \int_{(M_2)}^{(M_2)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{(M_1)}^{(M_2)} F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

Мгновенная мощность силы $N = \vec{F} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot \dfrac{d\vec{r}}{dt}.$

Если элементарная работа $\delta A = dA$, то есть является полным дифференциалом функции работы *A,* то $N = \dfrac{dA}{dt}$. Мощность, как и работа, является скалярной величиной. Она может быть положительна, отрицательна или равна нулю.

2.1.8*. *Мощность и элементарная работа сил, действующих на твердое тело

Суммарная мощность всех сил, действующих на тело, равна

$$N = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i \,.$$

Скорость *i* –ой точки тела в общем случае его движения (см. п. 1.5.5):

$$\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{v}_{i,C} = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}_{i,C},$$

где $\vec{r}_{i,C}$ - радиус-вектор i -ой точки относительно полюса *C* (рис. 11).

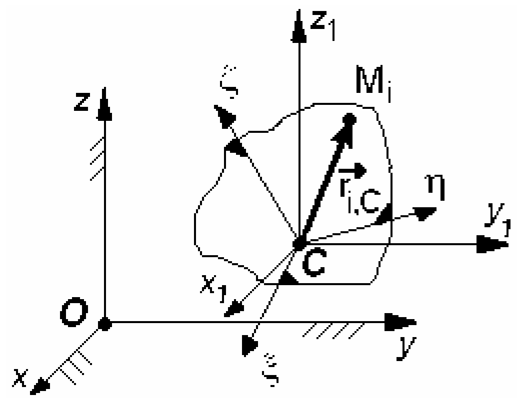


Рис. 11

Суммарная мощность сил будет равна

$$N = \sum_{i=1}^{n} N_i = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = (\sum \vec{F}_i) \cdot \vec{v}_C + (\sum \vec{r}_{i,C} \times \vec{F}_i) \cdot \vec{\omega} =$$
$$= \vec{F} \cdot \vec{v}_C + \vec{M}_C \cdot \vec{\omega} = \vec{F}^E \cdot \vec{v}_C + \vec{M}_C^E \cdot \vec{\omega}.$$

Определим вектор бесконечно малого поворота тела как $d\vec{\varphi} = \vec{\omega}\, dt$; тогда суммарная элементарная работа сил

$$\delta A = \sum \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = N \cdot dt = \vec{F}^E \cdot d\vec{r}_C + \vec{M}_C^E \cdot d\vec{\varphi}.$$

Поскольку главный вектор и главный момент внутренних сил равны нулю, то эти силы не совершают работы при движении твердого тела. Работа складывается из работы главного вектора внешних сил при поступательном движении тела (вместе с полюсом *C*) и работы главного момента внешних сил при сферическом движении вокруг полюса.

При вращательном движении тела вокруг неподвижной оси Cz, проходящей через полюс *C*, суммарная элементарная работа сил равна $\delta A = M_z^E d\varphi_z$, а мощность сил $N = M_z^E \omega_z$.

2.1.9. Теоремы динамики механической системы в дифференциальной форме можно записать как суждения о скоростях изменения мер движения:

$$\frac{d}{dt}\vec{Q} = \vec{F}^E; \quad \frac{d}{dt}\vec{K}_O = \vec{M}_O^E; \quad \frac{d}{dt}T = N^E + N^I.$$

(Подчеркнем, что скорость изменения кинетической энергии есть суммарная мощность внешних и *внутренних* $\vec{N}^I$ сил!)

2.2. Статика твердого тела

2.2.1. Эквивалентные друг другу системы сил

Количество движения и кинетический момент твердого тела выражаются через скорость $\vec{v}_C$ полюса – центра масс и угловую

скорость $\vec{\omega}$ тела (см. п. 3.2). Теоремы об изменении количества движения и об изменении кинетического момента дают возможность составить дифференциальные уравнения относительно проекций этих скоростей – дифференциальные уравнения движения тела. Количество этих уравнений равно числу степеней свободы тела. Главный вектор и главный момент системы внешних сил вполне определяют силовое влияние на тело со стороны окружающей среды. Поэтому системы сил, приложенные к твердому телу, считаются взаимно *эквивалентными*, если они имеют одинаковые главные векторы и главные моменты.

Пусть система сил состоит из одной силы. Перенеся силу вдоль линии ее действия, получим новую систему из одной силы, эквивалентную исходной. Таким образом, сила, приложенная к твердому телу, является *скользящим* вектором.

2.2.2. Векторные уравнения равновесия твердого тела

Если твердое тело покоится в течение некоторого промежутка времени, то меры механического движения его сохраняют в этом промежутке постоянные значения, равные нулю. Тогда из теорем динамики получаем необходимые условия равновесия твердого тела, накладываемые на приложенные к нему силы (*уравнения равновесия системы сил*):

$$\vec{F}^E = 0; \quad \vec{M}_O^E = 0.$$

Внутренние силы на состояние твердого тела как единого объекта не влияют, поэтому индекс «*E*» (*Exterior*) в записях уравнений равновесия по умолчанию опускают.

2.2.3. Классификация систем сил, действующих на твердое тело, по взаимному расположению линий их действия:

А) *пространственные и плоские* системы сил;

Б) *сходящиеся* системы сил (линии действия всех сил пересекаются в одной точке); системы *параллельных* сил (линии действия всех сил параллельны друг другу); *произвольные* системы сил.

Например: «пространственная система параллельных сил».

2.2.4. Уравнения равновесия твердого тела (уравнения равновесия системы сил) в проекциях на оси декартовой системы координат

Уравнения равновесия *произвольной пространственной* системы сил

$$\sum F_{ix}=0;\ \sum F_{iy}=0;\ \sum F_{iz}=0;$$

$$\sum M_{Ox}(\vec{F}_i)=0;\ \sum M_{Oy}(\vec{F}_i)=0;\ \sum M_{Oz}(\vec{F}_i)=0.$$

Возможна краткая форма записи: $\sum X_i=0; \sum M_{ix}=0$ и т.д.

Уравнения равновесия *произвольной плоской* системы сил

$$\sum F_{ix}=0;\ \sum F_{iy}=0;\ \sum M_{Oz}(\vec{F}_i)=0.$$

В уравнении моментов для плоской системы сил индекс «*z*» по умолчанию опускают. Знаки моментов определяют по правилу часовой стрелки: если сила «стремится» повернуть плоскую фигуру вокруг данного полюса против часовой стрелки, то момент считают положительным, иначе – отрицательным. Если полюс лежит на линии действия силы, то момент равен нулю.

Можно составить уравнения равновесия плоской системы сил иначе:

- два уравнения моментов относительно разных полюсов и одно уравнение проекций сил на ось, не перпендикулярную прямой, содержащей полюсы;

- три уравнения моментов относительно трех разных полюсов, не лежащих на одной прямой.

2.2.5. ***Пара сил*** – система двух сил, равных по величине, направленных в противоположные стороны и имеющих не совпадающие линии действия. Главный вектор такой системы двух сил равен нулю, а главный момент относительно любого полюса есть один и тот же вектор $\vec{M}$, называемый *моментом пары*. Пусть $F_1=F_2=F$; тогда величина момента пары равна $M=F\,h$. Здесь *h* – расстояние между линиями действия сил пары, называемое *плечом пары* (рис. 12).

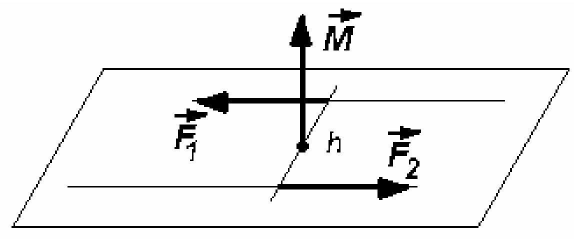


Рис. 12

Действие на твердое тело пары сил характеризуется действием на него силового момента $\vec{M}$. Силы, образующие пары, могут иметь те или иные величины, точки приложения и линии действия. Но если моменты этих пар одинаковы по величине и направлению, то такие пары *эквивалентны* друг другу. Момент пары сил – *свободный* вектор. Действие пары на тело часто изображают на рисунках ломаной линией со стрелками или круговой стрелкой.

2.2.6. ***Равнодействующая системы сил*** - это одна сила, эквивалентная данной системе сил. Если главный момент системы относительно полюса *O* оказался равен нулю, а главный вектор – нет, то говорят, что система сил приведена к равнодействующей. Так что если система сил имеет равнодействующую, то равнодействующая равна главному вектору системы.

2.2.7. Приведение системы сил к полюсу. Инварианты статики

Систему сил, приложенных к твердому телу, можно интерпретировать как совокупность приложенной в полюсе *O* силы, равной главному вектору $\vec{F}$, и пары, момент которой равен главному моменту $\vec{M}_O$. В этом смысле система сил считается *приведенной* к полюсу *O*. Главный вектор не зависит от полюса приведения, а главный момент при переходе от полюса *O к полюсу C* изменяется согласно формуле

$$\vec{M}_C=\vec{M}_O+\vec{M}_C(\vec{F}_O),$$

где $\vec{F}_O$ - главный вектор, приложенный в полюсе *O*.

При перемене полюса приведения сохраняет значение проекция M_F главного момента на направление главного вектора. Величины $\vec{F}$ и M_F называются *инвариантами* статики твердого тела.

Систему сил можно привести в общем случае к *динаме*; в частных случаях - к равнодействующей или к паре. Динама – это совокупность главного вектора и главного момента, в случае, когда они направлены вдоль одной прямой. Эта прямая называется осью динамы или *центральной винтовой осью.*

В случае равновесия системы сил главный вектор и главный момент относительно *любого* полюса равны нулю.

2.2.8. Центр тяжести тела - такая точка C выпуклого замыкания тела, через которую проходит линия действия равнодействующей сил тяжести при любом положении тела в пространстве. Если заданы веса P_i фрагментов тела и координаты x_i, y_i, z_i центров тяжести этих фрагментов, то координаты общего центра тяжести C вычисляются по формулам:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i}; \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i}; \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i}.$$

Радиус-вектор центра масс: $\vec{r}_C = \dfrac{\sum P_i \vec{r}_i}{P}$,

где $P = \sum P_i$ - общий вес тела. Множители P_i в общем смысле называют *весовыми коэффициентами*. Выражения P_i / P называют нормированными весовыми коэффициентами, т.к. их сумма равна 1.

Координаты центра тяжести *сплошного* (континуального) тела, имеющего плотность $\rho = \rho(x, y, z)$: $x_C = \dfrac{\iiint_{(V)} x\rho\, dV}{\iiint \rho dV}$, ... и т.д.

Центр тяжести C фигуры, имеющей вид уголка (рис. 13), или бумеранга, находится вне уголка. Построив общую касательную к закруглениям его концов, получим выпуклую фигуру – выпуклое замыкание уголка, содержащее точку C.

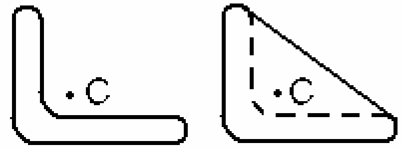


Рис. 13

2.2.9. Координаты центра тяжести однородного тела

А) Тело составлено из фрагментов:

$$x_C = \frac{\sum V_i x_i}{V}, \quad y_C = \frac{\sum V_i y_i}{V}, \quad z_C = \frac{\sum V_i z_i}{V}.$$

Здесь роль весов играют объёмы (площади, длины) фрагментов. Если фрагмент представляет собой пустоту (раковину в теле), то его объём берется со знаком «-».

Б) Сплошное тело: $x_C = \dfrac{\iiint_{(V)} x\, dx\, dy\, dz}{V}$, $y_C = \ldots$

В) Симметричное однородное тело: центр тяжести лежит в плоскости симметрии или на оси симметрии или совпадает с центром симметрии.

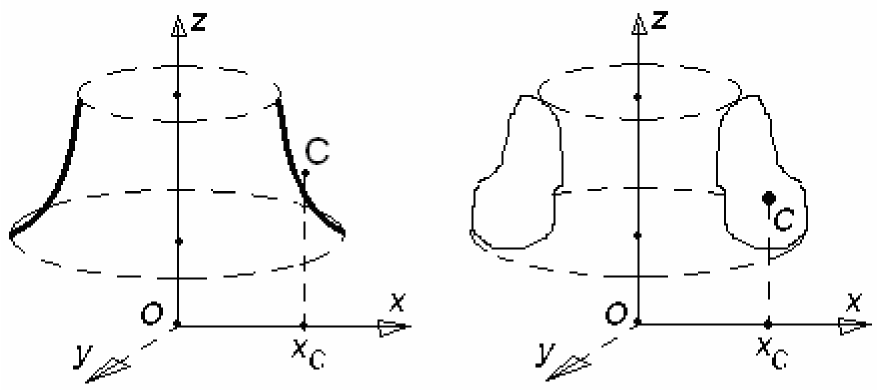
2.2.10. Теоремы Гюльдена

А) Пусть отрезок кривой $z = z(x)$, вращаясь вокруг оси Oz, образовал поверхность вращения (рис. 14,а). Тогда площадь её боковой части

$$S_{Бок} = 2\pi\, x_C\, l,$$

где x_C - абсцисса центра C тяжести отрезка кривой, l - длина отрезка.

Б) Пусть плоская фигура, вращаясь, образует тело вращения (рис. 14, б). Его объём равен $V = 2\pi\, x_C S$, где x_C - абсцисса центра тяжести фигуры, S – ее площадь.



а б

Рис. 14

2.2.11. Основные типы связей и их реакции

При решении задач на равновесие действие связей описывают, вводя в
задачу реакции связей и прикладывая их к выбранному объекту исследования.

После этого сами связи далее игнорируются (принцип *освобождаемости* от связей*)* и объект считается условно свободным.

А) Связи в плоских задачах статики (рис.15)

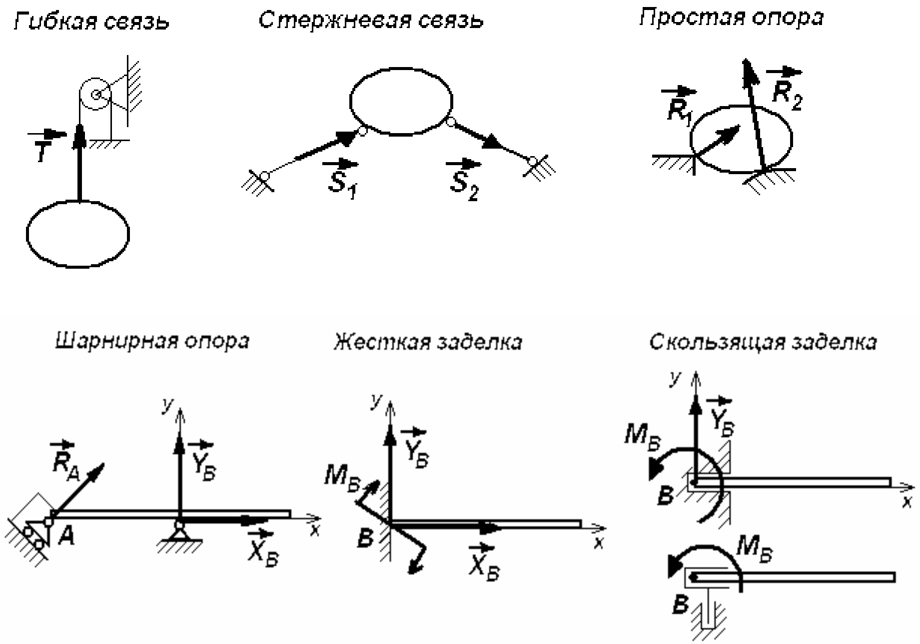


Рис. 15

Реакция *гибкой связи* направлена вдоль нити (каната, троса и т.п.) от объекта исследования.

Реакция невесомого *стержня* направлена вдоль прямой, соединяющей концы стержня. Стержень оканчивается шарнирами. Силы прикладываются к стержню только в его концах. Стержень или сжат, или растянут.

Реакция *простой* физически гладкой опоры направлена от опоры к объекту исследования вдоль нормали к их соприкасающимся поверхностям. Одна из этих поверхностей может быть геометрически не гладкой, если производные функций, задающих поверхность, имеют разрыв.

Реакция *подвижной шарнирной* опоры направлена перпендикулярно опорной поверхности. Эта опора выражает запрет на смещение конца A в направлении перпендикуляра к опорной поверхности и одновременно - разрешение на смещение конца A вдоль опорной поверхности и на поворот вокруг конца A.

Неподвижная шарнирная опора запрещает смещение точки *B* в плоскости xBy и разрешает поворот вокруг *B* (т.е. вокруг оси шарнира). Направление реакции заранее не известно; при решении задачи искомую реакцию обычно раскладывают на составляющие $\vec{X}_B$ и $\vec{Y}_B$.

Жесткая заделка означает соединение балки со стеной, при котором все три степени свободы балки как плоской фигуры закрепощены. Действие заделки на балку характеризуется моментом заделки и составляющими силами.

Скользящая заделка оставляет закрепощённой «вращательную» степень свободы балки и одну или две поступательные; соответственно действие заделки на балку описывается моментом заделки и силой, перпендикулярной разрешенному направлению скольжения, или только моментом.

Б) В пространственных задачах встречаются:

цилиндрический шарнир, реакция которого описывается составляющими силами, перпендикулярными оси шарнира;

сферический шарнир, реакция которого описывается тремя составляющими силами;

заделка, реакция которой описывается в общем случае тремя составляющими силами и тремя составляющими момента заделки.

2.2.12. Статически определимые конструкции

Когда исследуют равновесие системы твердых тел, соединенных между собой тем или иным способом, то её называют конструкцией. Если неизвестные величины в задаче статики могут быть найдены из системы уравнений равновесия всей конструкции или ее частей, то конструкция называется статически определимой. Если число неизвестных больше числа уравнений статики, то конструкция будет статически неопределимой.

В задачах статики часто встречаются стержневые конструкции: фермы, рамы и проч. Стержнем называют цилиндрическое тело, поперечный размер которого мал по сравнению с размером в направлении образующей. Стержни могут «работать» не только на сжатие-растяжение, но и на изгиб и кручение; их в строительной механике называют также балками и брусьями. Рассмотрим плоскую конструкцию из трех стержней (балок) 1, 2 и 3, изображенную на рис. 16, а. На

каждый отдельно взятый в качестве твердого тела стержень действует плоская произвольная система сил (см. п. 2.2.4), и для трех стержней можно составить $3 \times 3 = 9$ уравнений равновесия. В этих уравнениях будут фигурировать 10 неизвестных реакций: реакции опор X_A, Y_A, M_A и X_D, Y_D, M_D, а также проекции действующих в шарнирах сил давления балок друг на друга: X_B, Y_B и X_C, Y_C (рис. 16,б). Количество неизвестных превышает число уравнений статики на 1; последнее число можно рассматривать как меру статической неопределимости данной конструкции. Найдем число степеней её свободы по формуле п. В.10. Система трех свободных балок как плоских фигур имеет $3 \times 3 = 9$ степеней свободы. Уравнения связей, выражающие условия заделки:

$$x_A = 0; y_A = 0; \alpha = 0{,}5\pi; \; x_D = AD; y_A = 0; \beta = 0{,}5\pi.$$

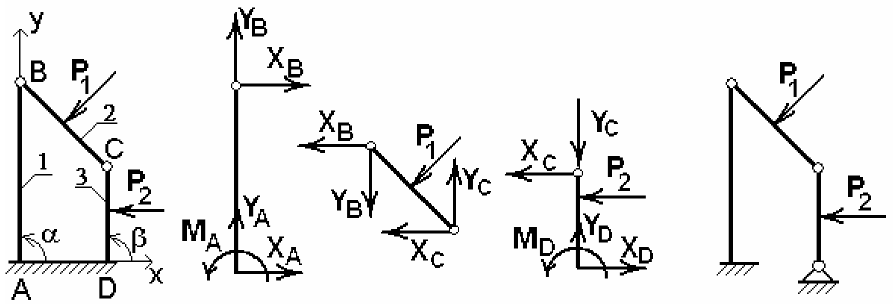
Уравнения, описывающие шарнирные соединения балок друг с другом:

$$x_{B,1} = x_{B,2}; \; y_{B,1} = y_{B,2}; \; x_{C,1} = x_{C,2}; \; y_{C,1} = y_{C,2}.$$

Всего 10 уравнений связей; число степеней свободы

$$s = 9 - 10 = -1.$$

Число степеней свободы статически определимой стержневой конструкции, изображенной на рис. 16, в, равно нулю.



а б в

Рис. 16

Расчет статически неопределимой упругой стержневой конструкции выполняют методами сопротивления материалов. Допустив, что конструкция способна деформироваться, к уравнениям равновесия самой конструкции или ее частей как твердых тел добавляют уравнения, выражающие условия *совместности деформаций* ее частей. Систему уравнений равновесия замыкают уравнения, описывающие связь между деформациями и силами - закон упругости (закон Гука).

2.2.13. Силы сопротивления движению тела по опоре

Пусть твердое тело - объект исследования – движется, опираясь на неподвижную опору в точке ***P*** (рис. 17). Движение тела можно представить как поступательное вместе с полюсом ***P*** (скольжение в касательной плоскости со скоростью $\vec{v}_P$) и вращение вокруг полюса. Угловую скорость вращения тела разложим на нормальную составляющую $\vec{\omega}_B$ - угловую скорость верчения – и касательную $\vec{\omega}_K$ - угловую скорость качения тела.

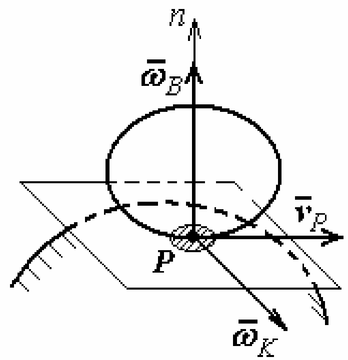


Рис. 17

Реальное взаимодействие между объектом исследования и опорой происходит в некоторой малой окрестности точки ***P***. В каждой точке этой окрестности на объект исследования действует сила реакции. Главный вектор системы сил реакций разложим на нормальную

составляющую $\vec{N}$ и касательную $\vec{F}_{СЦ}$ - силу сцепления. Главный момент разложим тоже на нормальную составляющую $\vec{M}_{СВ}$ и касательную $\vec{M}_{СК}$. Чтобы перемещать одно тело по другому (по опоре), необходимо затрачивать механическую энергию, которая расходуется на сообщение частицам этих тел теплового движения, а также на изменение их внутренней энергии. Таким образом, сила сцепления и составляющие моменты $\vec{M}_{СВ}$ и $\vec{M}_{СК}$ выражают собой *сопротивления* движению: они направлены против соответствующих скоростей и имеют отрицательную мощность. Момент $\vec{M}_{СВ}$ называется моментом сопротивления верчению, а момент $\vec{M}_{СК}$ - моментом сопротивления качению тела.

2.2.14. Трение скольжения

При скольжении сила сцепления называется силой трения скольжения (или просто силой трения) $\vec{F}_{ТР} = \vec{F}_{ТР.СК}$. Как показывает опыт, силу трения во многих задачах можно рассчитывать по формуле Амонтона - Кулона:

$$F_{ТР} = F_{ТР.СК} = f\,N\,.$$

Коэффициент $f = f_{СК}$ (friction) называется коэффициентом трения скольжения. В приближенных расчетах коэффициент трения полагают постоянным, зависящим только от состояния соприкасающихся поверхностей и не зависящим от скорости тела (такое трение называется *сухим*), но это - идеализация. Так, например, коэффициент f при скольжении одного листа обувного кожкартона нормальной влажности по другому существенно зависит от скорости v скольжения (рис. 18).

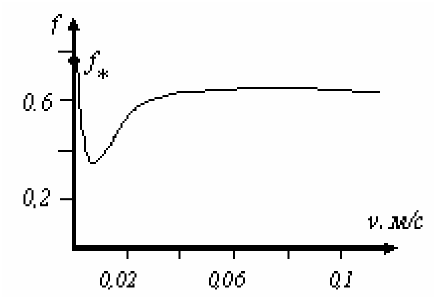


Рис. 17

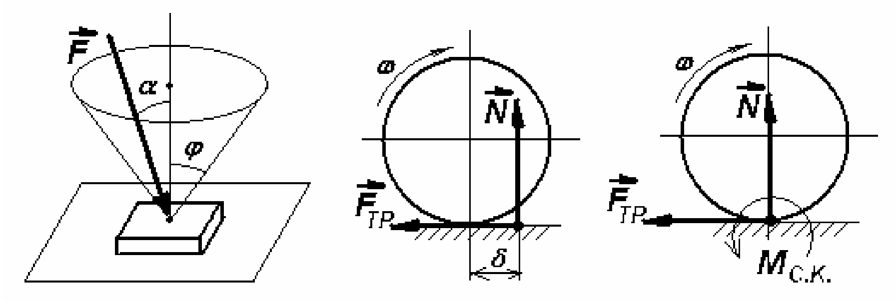
В начале скольжения (в момент *страгивания* тела) отношение силы сцепления к силе нормальной реакции (принимаемое за *коэффициент трения покоя* f_*) обычно больше коэффициента f при скольжении: $f_* > f_{CK}$.

Если скорость скольжения равна нулю, то величина и направление силы $\vec{F}_{СЦ}$, называемой в этом случае силой трения покоя, являются неизвестными. Они определяются из уравнений равновесия. Величина силы трения покоя не превосходит величины силы трения скольжения $\vec{F}_{TP.CK}$.

Пусть тело малых размеров может скользить по шероховатой опоре вдоль оси Ox. Оно или покоится, или движется (равномерно или ускоренно). Если тело покоится, то справедливо уравнение равновесия $\sum F_{ix} = 0$, а сила сцепления – сила трения покоя – неизвестна. Если тело движется равномерно, то справедливо уравнение равновесия, а сила трения равна $F_{TP} = fN$ и направлена против скорости тела. Если тело движется ускоренно, то имеют место соотношения:

$$\sum F_{ix} = ma_x \neq 0; \; F_{TP} = fN.$$

Страгивание тела пренебрежимо малого веса невозможно, если линия действия силы располагается внутри *конуса трения* (рис. 18,а). Угол $\varphi = arctg\, f_*$ называется углом трения.



а б в

Рис. 18

Тело на наклонной плоскости может начать соскальзывать вниз из состояния покоя, если угол α наклона плоскости к горизонту больше, чем угол трения, т.е. должно быть выполнено условие $tg\alpha > f_*$.

2.2.15. Сопротивление качению колеса

Система сил реакций опоры во время качения колеса может быть приведена к равнодействующей, точка приложения которой отстоит от основания вертикального диаметра на расстояние δ по направлению движения его центра (рис. 18,б). Это расстояние называется *коэффициентом сопротивления качению.* Если привести реакции к основанию диаметра (рис. 18,в), то согласно формуле изменения главного момента при переносе полюса приведения (п. 2.2.7) получаем момент сопротивления качению $M_{CK} = N \cdot \delta$.

2.2.16. Трение тонкой гибкой нити о шероховатый цилиндр

Условие, при котором нить начинает соскальзывать по образующей цилиндра вдоль оси нити, описывается *формулой Эйлера:*

$$T = T_0\, e^{f\alpha}.$$

Здесь T – стягивающая сила, T_0 - удерживающая сила, α – угол охвата цилиндра нитью, f - коэффициент трения при страгивании нити.

Наука, изучающая трение между твердыми телами, называется *трибологией.* Исследование микроскопической природы трения требует применения методов физики твердого тела, которая, в свою очередь, базируется на принципах квантовой механики.

Список литературы

Основная литература
1. Гернет М. М. Курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1987.
2. Яблонский А. А., Никифорова В. М. Курс теоретической механики. - СПб: Изд-во «Лань», 2001.
3. Яблонский А.А. Сборник задач для курсовых работ по теоретической механике. - М.: Высшая школа, 1985 (и предыдущие изд.).

Дополнительная литература
4. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. – М.: Наука, 1966 (и послед. изд.)
5. Бутенин Н. Н., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики. Т. I и II. - М.: Наука, 1985, 240 с. и 496 с.
6. Добронравов В. В., Никитин Н. Н. Курс теоретической механики. - М.: Высшая школа, 1983, 576 с.
7. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики. Части I и II. - М.: Наука, 1982.
8. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики. - М.: Высшая школа, 1995.
9. Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах, ч.1, 2, 3. —М.: Физматгиз, 1995.
10. Сборник задач по теоретической механике/ Под ред. К.С. Колесникова.- М.: Наука, 1983 (и послед. изд.).
11. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. - М.: Наука, 1986 (и послед. изд.).
12. Теоретическая механика: терминология, обозначения, основные формулы (Справочное учебное пособие) / Составитель Э.Е. Пейсах. - СПб: изд-во СПГУТД, 1995, 32 с.

GAUDEAMUS

1

Gaudeamus igitur,
Juvenes dum sumus!
Post jucundam juventutem,
Post molestam senectutem,
Nos habebit humus.

2

Ubi sunt, qui ante nos
In mundo fuere?
Transeas ad superos,
Transeas ad interos
Hos si vis videre!

3

Vita nostra brevis est,
Brevi finietur;
Venit mors velociter,
Rapit nos atrociter,
Nemini parcetur!

4

Vivat Academia!
Vivant professores!
Vivat membrum quodlibet!
Vivant membra quaelibet!
Semper sint in flore!

5

Vivant omnes virgines,
Graciles, formosae!
Vivant et mulieres
Tenerae, amabiles,
Bonae, laboriosae!

6

Vivant et res publica
Et qui illam regunt!
Vivant nostra civitas,
Maecenatum caritas,
Qui nos hic protegunt!

+7

Pereat tristitia,
Pereant dolores!
Pereat diabolus,
Quivis *antiburschius*
Atique irrisores!