

Министерство образования и науки РФ  
 Федеральное агентство по образованию  
 Государственное образовательное учреждение высшего проф-  
 ессионального образования  
 «Санкт-Петербургский государственный университет техноло-  
 гии и дизайна»

## ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ КУРСА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

**Опорный конспект лекций  
 для студентов групп 2-МД-5,6**

Составил А.Г. Усов

Кафедра теоретической и прикладной механики

Санкт-Петербург  
 2008

## Содержание

<b>3. Динамика материальной точки и механической системы</b> .....	3
<b>3.1. Динамика материальной точки</b> .....	3
Основное уравнение динамики точки (3). Сила инерции. Уравнение дина- мики относительного движения (3). Две задачи динамики матер. точки (4). Решение обратной задачи (4). Начальные условия (5). Простейшие задачи динамики точки (5). К задаче об исследовании движения тела, брошенного под углом к горизонту (9). Свободные гармонические незатухающие коле- бания точки (11). Эквивалентная жесткость упругих элементов (13). Свободные затухающие колебания (13). Фазовый «портрет» гармонического осциллятора (ГО) (14). Вынужденные колебания (15). Вынужденные коле- бания вблизи резонанса (биения) и при резонансе (16). Коэффициент дина- мичности (17). Действие периодической или произвольной вынуждающей силы на ГО (18-19). ГО как звено САУ (19). Вынужденные колебания ГО с сопротивлением (20). Примеры колебательного движения (21).	
<b>3.2. Геометрия масс. Теоремы динамики</b> .....	23
Центр масс мех. системы (23). Выражение количества движения системы через скорость ее центра масс; уравнение движения центра масс (24). Тео- ремы Кёнига (24). Кинетическая энергия твердого тела в простейших слу- чаях его движения (25). Кинетический момент вращающегося тв. тела (26). Кинетический момент и кинетическая энергия тела при его сферическом движении. Тензор инерции (26). Теорема Гюйгенса-Штейнера (31). Момен- ты инерции относительно полюса и плоскости (31). Моменты инерции неко- торых однородных тел (32). Потенциальное силовое поле (33). Потенциаль- ная энергия (34). Работа силы тяжести (35). Работа упругой силы (36). О ки- нетической энергии системы: приведение масс (37). Теорема об изменении кинетической энергии (38). Теорема об изменении количества движения; импульсные функции (39). Теорема об изменении кинетического момента (41). Физический маятник (42). Центр удара (42). Приближенная теория гироскопа (44). Удар матер. точки о преграду (44). Прямой удар двух тел (46).	
<b>3.3. Метод кинетостатики</b> .....	47
Приведение сил инерции к простейшему виду (47). Уравнения кинетоста- тики твердого тела (48). Дифференциальные уравнения движения твердого тела (48).	
<b>4. Аналитическая механика</b> .....	51
<b>4.1. Классификация связей</b> .....	51
<b>4.2. Виртуальные перемещения. Обобщенные силы</b> .....	51
Виртуальные и возможные перемещения (51). Идеальные связи (52). Принцип виртуальных перемещений - ПВП (52). Общее уравнение динами- ки системы (53). Обобщенные силы (53). Классификация обобщенных сил	

(55). Выражение ПВП в терминах обобщенных сил (55). Общее уравнение динамики системы в терминах обобщенных сил (57).

**4.3. Уравнения Лагранжа. Уравнения Гамильтона** ..... 58

Уравнения Лагранжа второго рода (58). Функция Лагранжа (58). Структура уравнений Лагранжа – 2 (58). Вариационный принцип Гамильтона (59)

Уравнения Гамильтона (61). Циклические координаты (63).

**4.4. Малые колебания консервативной системы** ..... 63

Теорема Лагранжа об устойчивости положения равновесия (63). Малые колебания консервативной системы вблизи положения устойчивого равновесия (64).

**Литература** ..... 67

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

### Основные положения курса

#### Часть 2

### РАЗДЕЛ 3. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

#### 3.1. Динамика материальной точки

##### 3.1.1. Основное уравнение динамики материальной точки в

случае, когда на точку действуют  $n$  сил, имеет вид:  $m\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ .

Основное уравнение динамики *несвободной* точки удобно представить в следующей форме:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R},$$

где  $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$  - равнодействующая задаваемых сил, приложенных

к точке,  $\vec{R} = \sum \vec{R}_i$  - равнодействующая реакций связей.

Реакции связей, при необходимости, могут быть исключены из уравнений движения, или найдены с помощью специальных приемов.

##### 3.1.2. Сила инерции. Уравнение кинестатики материальной точки. Уравнение динамики относительного движения

Сила инерции по Даламберу:  $\vec{\Phi} = -m\vec{a}$  - «фиктивная» сила, приложенная к материальной точке. Определенного контрагента в данном взаимодействии нет. В роли контрагента здесь выступает *универсум* - весь мир, окружающий данную материальную точку.

Основное уравнение динамики точки благодаря введению силы инерции преобразуется в *уравнение кинестатики*:

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi} = 0.$$

Основное уравнение динамики *относительного движения* точки:

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_{cor},$$

где  $\vec{\Phi}_e = -m\vec{a}_e$ ,  $\vec{\Phi}_{cor} = -m\vec{a}_{cor}$  - переносная и кориолисова силы инерции.

Это уравнение описывает движение точки относительно неинерциальной системы отсчета, совершающей движение относительно инерциальной системы.

### 3.1.3. Две задачи динамики материальной точки

Первая (прямая) задача: определение неизвестных величин (например, реакций связей) по заданным кинематическим параметрам движения точки.

Вторая (обратная) задача: определение движения точки по заданным силам, связям и начальным условиям.

**3.1.4. Решение обратной задачи** динамики свободной материальной точки обычно включает в себя следующие этапы:

- составление системы дифференциальных уравнений движения точки и начальных условий к ним (формализация задачи: создание математической модели);

- решение задачи Коши: построение частного решения системы при заданных начальных условиях (работа с формализованной моделью);

- кинематические исследования (интерпретация формальных результатов).

Примем условие, согласно которому задаваемые силы могут зависеть от времени, положения точки и от скорости точки (но не зависят от ускорения и производных от него). Дифференциальные уравнения движения свободной точки в пространстве в декартовой системе координат могут иметь вид:

$$m\ddot{x} = F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z});$$

$$m\ddot{y} = F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z});$$

$$m\ddot{z} = F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}).$$

Это система дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций

$x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ . Решить систему означает найти такие функции  $X, Y, Z$ , которые при подстановке в уравнения системы обращают их в тождества, справедливые при любом значении

независимой переменной  $t$  из промежутка  $[0; T]$ , на котором исследуется движение (правая граница может быть бесконечностью).

Процесс отыскания решения называется интегрированием системы дифференциальных уравнений. В этом процессе применяются различные приемы: понижение порядка уравнения, разделение переменных и т.д.

Совокупность функций  $X, Y, Z$ , удовлетворяющих вышеприведенной системе дифференциальных уравнений, образует *общий интеграл*. В случае явного описания функций  $X, Y, Z$  общий интеграл обычно называют *общим решением* системы. Общее решение системы дифференциальных уравнений движения материальной точки могут содержать до 6 параметров – постоянных интегрирования  $C_1, C_2, \dots, C_6$ . Постоянные интегрирования определяются в результате решения системы уравнений, получающейся в результате совмещения общего решения с начальными условиями.

**3.1.5. Начальные условия (НУ)** при решении обратной задачи динамики точки – это условия, накладываемые на начальную скорость и начальное положение точки, записанные, например следующим образом:

$$x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0,$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0, \dot{z}(0) = \dot{z}_0.$$

Число начальных условий должно соответствовать числу и порядку дифференциальных уравнений движения (условию корректности постановки задачи Коши). НУ должны быть сформулированы в терминах тех неизвестных функций, которые участвуют в записях дифференциальных уравнений.

**3.1.6. Некоторые простейшие задачи** динамики материальной точки, решаемые методами понижения порядка и разделения переменных.

Пусть свободная материальная точка движется по прямой  $Ox$  под действием задаваемой силы, проекция которой на ось

$Ox$  есть  $F_x$ . Обозначив  $\frac{F_x}{m} = f$ , запишем дифференциальное

уравнение движения в проекциях на ось  $Ox$  как  $\ddot{x} = f$ .

1) Рассмотрим случай, когда сила является функцией времени (или постоянна):

$$\ddot{x} = f(t).$$

Представив  $\ddot{x}$  как  $\frac{d\dot{x}}{dt}$ , понижаем порядок уравнения, а за-

тем, умножив обе части на  $dt$ , разделяем переменные:

$$d\dot{x} = f(t) dt.$$

2) Сила является функцией проекции скорости  $v_x = \dot{x}$ :

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = f(\dot{x}).$$

а) Пусть требуется определить зависимость между проекцией скорости  $\dot{x}$  и временем. Умножая обе части уравнения на величину  $\frac{dt}{f(\dot{x})}$ , разделяем переменные:

$$\frac{d\dot{x}}{f(\dot{x})} = dt.$$

Данная запись имеет смысл при условии  $f(\dot{x}) \neq 0$  (т.е. должно быть  $f(\dot{x}) > 0$  или  $f(\dot{x}) < 0$ ).

б) Пусть требуется найти зависимость между величинами

$x$  и  $\dot{x}$ . Делаем замену переменной  $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x} dx}{dx dt} = \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx}$  и

получаем:

$$\frac{\dot{x} d\dot{x}}{f(\dot{x})} = dx \quad (f(\dot{x}) \neq 0).$$

3) Сила является функцией положения точки. После замены переменной имеем:  $\dot{x} d\dot{x} = f(x) dx$ . Решение этого уравнения называют *интегралом энергии*.

*Пример.* Некоторое тело, имея отрицательную плавучесть величиной  $p$ , погружается в воду из состояния покоя. Сила сопротивления воды равна  $R = kv$ , где  $v$  - скорость погружения,  $k$  - постоянный коэффициент. Масса тела  $m$ . Определить скорость погружения тела. (Плавучестью называется разность между силой Архимеда  $F_A$  и силой тяжести. Если плавучесть положительна, то тело всплывает. Здесь  $F_A - mg = -p$ .)

Объектом исследования является погружающееся тело, принимаемое за материальную точку. Глубину погружения будем считать малой в сравнении с радиусом Земли, а время погружения ограничивать не будем:  $t \in [0; \infty)$ . Изображаем в произвольный момент времени  $\forall t \in (0; \infty)$  тело (рис. 1,а) и действующие на него силы. Записываем основное уравнение динамики точки в векторной форме:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{R}.$$

Введем ось  $Ox$ , направленную в сторону движения тела; тогда  $v_x = v$ .

Запишем уравнение движения (2) в проекциях на ось  $Ox$ :

$$m \frac{dv}{dt} = mg - F_A - R.$$

Подставив заданное выражение для силы сопротивления  $R$ , получаем дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции  $v(t)$ :

$$m \frac{dv}{dt} = p - kv$$

с начальным условием (НУ)  $v_0 = 0$ .

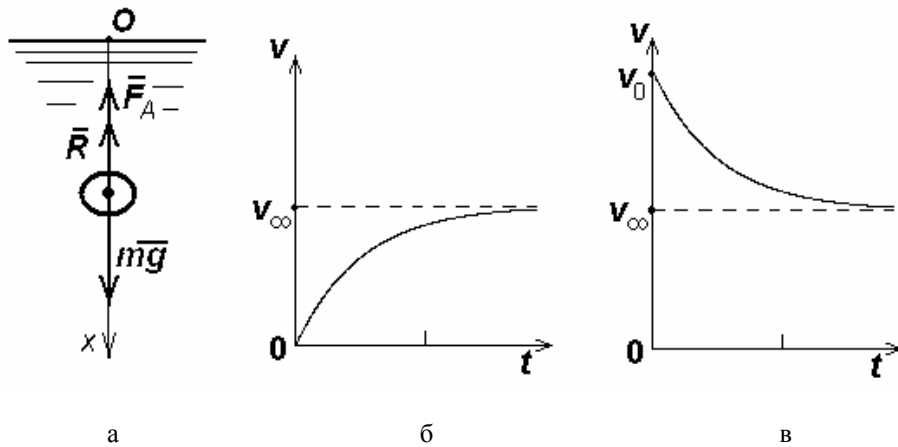


Рис. 1

В начале движения  $v = v_0 = 0$  и выражение  $p - kv > 0$ . Пусть последнее неравенство выполняется во все время движения. Разделяем переменные; преобразуем; интегрируем:

$$m \frac{dv}{p - kv} = dt; \quad \frac{d(p - kv)}{p - kv} = \left(-\frac{k}{m}\right) dt; \quad \ln|p - kv| = \left(-\frac{k}{m}\right)t + C.$$

Поскольку  $p - kv > 0$ , то  $|p - kv| = p - kv$ . Из формулы для силы  $R$  следует, что размерность коэффициента  $k$  есть  $1 \frac{\text{кг}}{\text{с}}$ , и тогда размерность

$\left[\frac{m}{k}\right] = 1\text{с}$ . Обозначим  $\frac{m}{k} = \tau$  - это так называемая *постоянная времени релаксации*. Находим далее:

$$p - kv = e^C e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{или} \quad p - kv = C e^{-\frac{t}{\tau}};$$

из НУ следует, что  $C = p$ , и тогда получаем

$$v = \frac{p}{k} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}).$$

Выражение  $\frac{p}{k}$ , имеющее размерность скорости и равное пределу  $v(t)$  при

$t \rightarrow \infty$  обозначим как  $v_\infty$ . График функции  $v(t) = v_\infty (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

имеет горизонтальную асимптоту  $v = v_\infty$  (рис. 1,б). Величина  $v_\infty$  есть точная верхняя граница (*супремум*) значений скорости. Эту предельную скорость можно было найти и из уравнения движения как величину, при которой выполняется необходимое условие  $\frac{dv}{dt} = 0$  наличия экстремума; только

здесь экстремум достигается в *несобственной* точке  $t \rightarrow \infty$ .

Если тело попадает в воду с начальной скоростью  $v_0 > v_\infty$ , то график скорости имеет вид, приведенный на рис. 1,в. «Сверхпредельное» движение не может само собой перейти в «допредельное» и наоборот.

### 3.1.7. К задаче об исследовании движения тела, брошенного под углом $\alpha$ к горизонту с начальной скоростью $v_0$ .

При скорости  $v_0 \leq 30 \text{ м/с}$  рассматривают простейшую модель задачи, удовлетворяющую условиям:

- 1) инерциальная система отсчета – геоцентрическая;
- 2) ускорение свободного падения  $g$  постоянно;
- 3) кривизна поверхности Земли не учитывается;
- 4) влияние воздуха на движение тела не учитывается.

Тогда, в результате интегрирования дифференциальных уравнений движения, получаем *кинематические* уравнения движения в системе координат  $xOy$  (ось  $Oy$  направлена вверх):

$$x = v_0 t \cos \alpha; \quad y = v_0 t \sin \alpha - gt^2 / 2.$$

Дальность обстрела, определяемая выражением  $\frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$ , дости-

гает максимального значения при  $\alpha = 45^\circ$ . Пуля, выпущенная из винтовки Мосина обр.1891г. с начальной скоростью  $620 \text{ м/с}$ , имела бы при выполнении сформулированных условий максимальную дальность полета около  $40 \text{ км}$  (в действительности, из-за сопротивления воздуха, менее  $4 \text{ км}$ ).

При скоростях  $30 м/с < v_0 < 250 м/с$  условие 4 преобразуется: вводится сила сопротивления воздуха  $\vec{R}$ , зависящая от скорости  $v$  тела согласно формуле

$$\vec{R} = -0.5CS\rho v^2 \frac{\vec{v}}{v},$$

где  $S$  - площадь поперечного сечения тела,

$\rho$  - плотность воздуха ( $\rho = 1.3 кг/м^3$  при нормальных условиях),

$C = C(v)$  - коэффициент лобового сопротивления, зависящий от формы тела и от числа Рейнольдса  $Re$ , характеризующего процесс обтекания тела воздухом.

Число Рейнольдса определяется по формуле  $Re = \frac{v\rho d}{\mu}$ . В этой

формуле  $d$  означает «характерный размер» тела (напр., диаметр пушечного ядра),  $\mu = 1.7 \cdot 10^{-5} кг/м \cdot с$  - вязкость воздуха. Для пушечного ядра  $C \approx 0.15 \approx const$  во время движения и, следовательно, сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости ядра.

При скоростях  $v_0 > 250 м/с$  приходится пересматривать все условия первоначальной модели. При сверхзвуковых скоростях снарядов нарезного оружия сила лобового сопротивления характеризуется волновым сопротивлением: около снаряда образуется волна сильного сжатия, которая расходится от него в виде конуса. Этот конус называется конусом Маха и имеет угол раствора  $\varphi = \arcsin \frac{c}{v}$  ( $c \approx 340 м/с$  - скорость звука). Коэффициент  $C$  при сверхзвуковой скорости движения  $v$  существенно зависит от этой скорости.

При стрельбе под большим углом возвышения  $\alpha$  со скоростями  $v_0$  порядка  $5c$  и более значительная часть траектории снаряда пролегает на высоте свыше  $20 км$ , где сопротивление воздуха незначительно. В 1918г. германская артиллерия из орудий «Колоссаль» обстреливала Париж с расстояния  $115 км$ . Стрельба велась при угле  $\alpha = 52.5^\circ$  с начальной скоростью  $2000 м/с$ . Наивысшая точка траектории лежала на высоте  $40 км$ , время полета снаряда  $3.5 мин$  (из них  $2 мин$  в стратосфере). Калибр  $210 мм$ , вес снаряда  $120 кг$ , длина ствола  $34 м$ , вес орудия  $750 тонн$ . Заряд составлял около  $200 кг$  пороха и развивал давление в канале ствола  $5000 атм$ .

При расчетах учитывалась зависимость плотности воздуха и ускорения свободного падения от высоты, геофизические данные о местности, включая кривизну земной поверхности, а также метеорологические данные о скорости и направлении ветра, давлении воздуха и проч. Из  $303$  снарядов  $120$  упало за пределами Парижа.

Уже к началу 1-й Мировой войны таблицы ответственных стрельб составлялись по отношению к *гелиоцентрической* системе отсчета. Так, в начале боя между немецкой и английской эскадрами у Фолклендских островов в 1914 г. английские снаряды упорно ложились на  $100 м$  левее цели. Командование забыло перевести поправку на вращение Земли, рассчитанную для  $50^\circ$  северной широты (в северном полушарии летящие по пологой траектории снаряды отклоняются вправо благодаря Кориолисовой силе инерции), на *южную* широту  $51^\circ$ .

**3.1.8. Свободные гармонические незатухающие колебания материальной точки**

Условием колебательного движения является наличие *восстанавливающей* силы, «стремящейся» вернуть материальную точку в положение равновесия, в котором величина восстанавливающей силы равна нулю. Простейшая модель колебательной системы – прямолинейное движение точечной массы под действием упругой силы, подчиняющейся закону Гука (рис. 2,а):

$$F = c |\Delta l|,$$

где  $C$  - коэффициент упругости (жесткость) пружины,

$\Delta l$  - деформация упругого элемента (пружины):  $\Delta l = l - l_H$ ,

$l$  - длина пружины в рассматриваемый момент времени,

$l_H$  - длина недеформированной пружины.

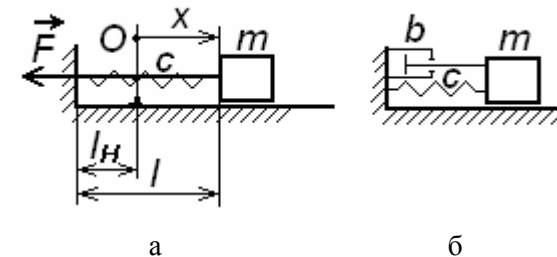


Рис. 2

При  $l = l_H$  тело массой  $m$  находится в положении равновесия. Взяв начало координат  $O$  в положении равновесия тела и направив ось  $Ox$  в сторону удлинения пружины (тогда  $x = \Delta l$  и  $F_x = -cx$ ), получаем дифференциальное уравнение движения тела - дифференциальное уравнение гармонического (линейного) *осциллятора* (устройства, совершающего колебательное движение)

$$\ddot{x} + k^2 x = 0.$$

Колебания, описываемые данным уравнением, происходят благодаря действию только восстанавливающей силы и называются свободными.

Величина  $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$  называется *циклической частотой* ко-

лебаний и измеряется в радианах в секунду (в отличие от частоты, измеряемой в Герцах). Циклическая частота свободных колебаний называется *собственной частотой* колебательного устройства (осциллятора).

Период колебаний определяется формулой  $\tau = \frac{2\pi}{k}$ .

Общее решение дифференциального уравнения гармонического осциллятора имеет вид  $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ , а частное решение, удовлетворяющее начальным условиям  $x(0) = x_0$ ,

$\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ , можно представить как

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt, \text{ или } x = A \sin(kt + \alpha).$$

График функции  $x(t)$  имеет вид синусоиды, и такие колебания называются гармоническими.

Амплитуда  $A$  и начальный сдвиг  $\alpha$  фазы колебаний находятся из выражений  $A \sin \alpha = x_0$ ,  $A \cos \alpha = \frac{\dot{x}_0}{k}$ .

*Фазой* называется значение аргумента  $kt + \alpha$  в данный момент времени. Функция  $x$  задается тремя параметрами:  $A, k, \alpha$ , характеризующими амплитуду, частоту и фазу колебаний. С помощью колебательного процесса передают информацию путем амплитудной, частотной или фазовой *модуляции*.

**3.1.9. Эквивалентная жесткость** системы двух упругих элементов при параллельном их соединении равна

$$c = c_1 + c_2.$$

Эквивалентная *податливость* (величина, обратная жесткости) при последовательном соединении двух упругих элементов равна

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}.$$

**3.1.10. Свободные затухающие колебания** материальной точки возникают при наличии (помимо восстанавливающей силы) силы сопротивления; на наличие этой силы указывают, изображая на рисунке с гармоническим осциллятором *демпфирующий* элемент (рис. 2,б) в виде цилиндра с поршнем (Der Dämpfer (нем.) -

«успокоитель»). Сила сопротивления  $\vec{R}$  - следящая сила, направленная всегда против вектора скорости:  $\vec{R} = -R \frac{\vec{v}}{v}$ .

В случае, когда величина этой силы пропорциональна скорости ( $R = bv$ ), а движение прямолинейно, проекция силы  $R_x = -b \dot{x}$ , и дифференциальное уравнение движения тела приобретает вид

$$\ddot{x} + 2n \dot{x} + k^2 x = 0,$$

где обозначено  $2n = \frac{b}{m}$ .

Характеристическое уравнение  $\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0$ , рассмотренное как приведенное квадратное уравнение, имеет дискриминант

$D = n^2 - k^2$ . Если  $D \geq 0$ , то движение тела носит аperiodический характер («чистое затухание»).

Если  $D < 0$  (случай малого сопротивления), то тело совершает свободные затухающие колебания. Общее решение уравнения движения может быть представлено в виде

$$x = A e^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha),$$

где  $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ .

Амплитуды составляют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, знаменатель  $d$  которой называется *декрементом* затухания (характеристика роста называлась бы *инкрементом*). Величина  $\ln d$  называется *логарифмическим декрементом* затухания.

### 3.1.11. Фазовый «портрет» гармонического осциллятора

Введя переменную  $y = \dot{x}$ , можно для гармонического осциллятора вместо одного дифференциального уравнения второго порядка записать систему двух уравнений первого порядка:

$$\frac{d}{dt} y = -k^2 x, \quad \frac{d}{dt} x = y.$$

Переменные  $x, y = \dot{x}$ , удовлетворяющие этой системе, называются фазовыми переменными; плоскость  $xOy$  называют фазовой плоскостью; точку с координатами  $x, y$  - изображающей точкой. Траектория изображающей точки - фазовая траектория. Множество фазовых траекторий, исходящих из разных начальных точек, представляет фазовый «портрет» процесса, описываемого данной системой дифференциальных уравнений. Движение изображающей точки по фазовой плоскости происходит против часовой стрелки.

Фазовые траектории гармонического осциллятора без сопротивления - эллипсы; начало координат  $O$  - точка равновесия - является особой точкой типа «центр» для описанной выше системы двух уравнений. Центр  $O$  является *устойчивой* особой точкой: изображающая точка не отклонится от центра больше, чем на расстояние, задаваемое начальным (и остающимся постоянным) значением полной энергии осциллятора.

Фазовые траектории осциллятора с сопротивлением, пропорциональным скорости, представляют собой спирали, приближающиеся асимптотически к точке  $O$ , при этом радиус-вектор изображающей точки бесконечно много раз поворачивается вокруг точки  $O$ . Точка  $O$  представляет собой асимптотически устойчивый фокус. На рис. 3 изображены фазовые траектории колебаний, происходящих по закону  $x = e^{-2t} \sin(10t + \alpha)$ , при трех значениях параметра  $\alpha$ .

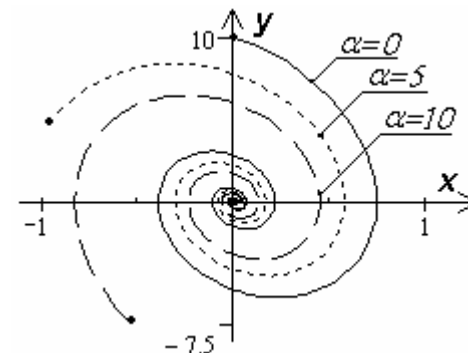


Рис. 3

В случае большого сопротивления ( $D > 0$ ) фазовые траектории также асимптотически приближаются к точке  $O$ , но радиус-вектор изображающей точки, поворачиваясь по часовой стрелке, не совершает ни одного полного оборота.

### 3.1.12. Вынужденные колебания гармонического осциллятора под действием гармонической вынуждающей силы

Пусть проекция вынуждающей силы есть  $F_x = H \sin pt$ .

Обозначив  $h = \frac{H}{m}$ , запишем дифференциальное уравнение *вынужденных колебаний* гармонического осциллятора без сопротивления:

$$\ddot{x} + k^2 x = h \sin pt.$$

Решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний, удовлетворяющее начальным условиям

$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0$ , можно записать в виде:



$$x = x_1 + x_2 + x_3,$$

где функции  $x_1, x_2, x_3$  описывают составляющие колебания осциллятора:

$$x_1 = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt \text{ - свободные колебания,}$$

$$x_2 = B \frac{p}{k} \sin kt \text{ - сопровождающие колебания,}$$

$$x_3 = B \sin pt \text{ - чисто вынужденные колебания,}$$

при этом  $B = \frac{h}{k^2 - p^2}$ . Величина  $x_2 + x_3$ , представляющая

собой *вынужденные* колебания, существует при условии  $k \neq p$ .

### \*3.1.13. Вынужденные колебания вблизи резонанса и при резонансе

Пусть частота вынуждающей силы, возрастая, приближается к значению собственной частоты, так что  $p = k - \lambda$ , где  $\lambda$  - малая величина. Рассмотрим вынужденные колебания

$$x_2 + x_3 = \frac{h}{k(2k - \lambda)} \left[ \sin kt + \frac{k(\cos \lambda t - 1)}{\lambda} \sin kt - \frac{k \sin \lambda t}{\lambda} \cos kt \right].$$

Известные формулы разложения тригонометрических функций в степенные ряды в окрестности нулевого значения аргумента

$$\cos \lambda t = 1 - \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \frac{(\lambda t)^4}{4!} - \dots;$$

$$\sin \lambda t = \lambda t - \frac{(\lambda t)^3}{3!} + \dots$$

убеждают нас, что при малом значении  $\lambda$  в квадратных скобках превалирует последнее слагаемое. Оно характеризует режим *биений* вблизи резонанса. На рис. 4,а представлен график функции

$$x = \frac{h}{\lambda(2k - \lambda)} \sin \lambda t \cos kt \text{ при значениях } h = 1, k = 2; \lambda = 0.1.$$

Используя приведенные выше разложения и обозначая через  $o(\lambda^2)$  величину высшего порядка малости, чем  $\lambda^2$ , получим

$$x_2 + x_3 = \frac{h}{k(2k - \lambda)} \left[ \sin kt + \frac{k\lambda t^2}{2} \sin kt - kt \cos kt + o(\lambda^2) \right];$$

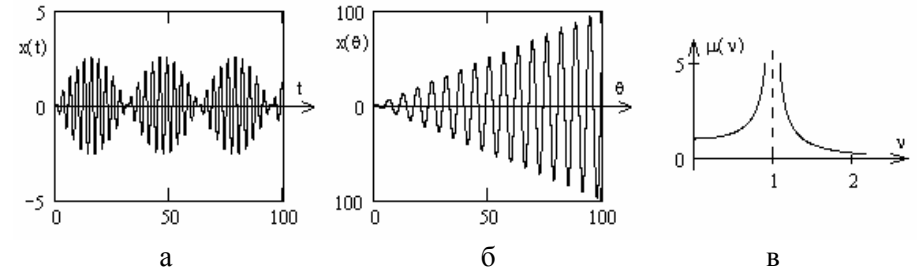


Рис. 4

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (x_2 + x_3) = \frac{h}{2k^2} (\sin kt - kt \cos kt) = \frac{B_0}{2} (\sin \theta - \theta \cos \theta),$$

где  $B_0 = \frac{h}{k^2} = \frac{H}{c}$  означает статическую деформацию упругого элемента под действием силы, величиной  $H$ ;  $\theta = kt$  - безразмерное время.

На рис. 4,б график «векового» (secular) члена  $\theta \cos \theta$ , присутствующего в выражении  $\lim(x_2 + x_3)$ , демонстрирует неограниченный рост амплитуд при продолжении колебаний (при отсутствии сопротивления!).

**3.1.14. Коэффициент динамичности. АЧХ** (амплитудно-частотная характеристика) гармонического осциллятора

*Коэффициентом динамичности*  $\mu$  назовем безразмерный коэффициент, выражающий отношение амплитуды  $|B|$  чисто вынужденных колебаний к некоторой характерной (нормирующей) длине,

например, к статической деформации  $|B_0| = \frac{|H|}{c} = \frac{|h|}{k^2}$ :

$$\mu = \left| \frac{B}{B_0} \right| = \frac{1}{|1 - \nu^2|},$$

где  $\nu = \frac{p}{k}$  означает безразмерную частоту. График этой функции (рис. 4,в) изображает АЧХ гармонического осциллятора. Правая часть графика убеждает нас в том, что когда частота вынуждающей силы значительно превосходит собственную частоту осциллятора, вынужденные колебания весьма малы.

**\*3.1.15. Действие произвольной периодической силы** на гармонический осциллятор

Пусть на осциллятор действует некоторая периодическая сила периода  $\tau$ . Тогда правую часть дифференциального уравнения его движения

$$\ddot{x} + k^2 x = f(t)$$

можно представить в виде *ряда Фурье*

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t),$$

где  $\omega = 2\pi / \tau$ . В силу линейности дифференциального уравнения движения частное его решение представляет собой аналогичный ряд. Компоненты этого ряда, характеризующие чисто вынужденные колебания, имеют коэффициенты при функциях  $\cos n\omega t$ ,  $\sin n\omega t$  со знаменателями вида  $k^2 - (n\omega)^2$ . В случае, когда  $k = n\omega$ , имеет место *резонанс  $n$ -го рода*.

**\*3.1.16. Действие произвольной вынуждающей силы** на гармонический осциллятор

Пусть в дифференциальном уравнении вынужденных колебаний гармонического осциллятора  $f(t)$  означает произвольную функцию времени, удовлетворяющую условиям, предъявляемым к *оригиналам* (см. «Преобразование Лапласа и операционное исчисление» в курсе высшей математики). Тогда частное решение этого уравнения можно представить в виде

$$x_{\psi} = \frac{1}{k} \int_0^t f(\theta) \sin(t - \theta) d\theta.$$

Приведенный здесь интеграл называется *свёрткой* функций  $f(t)$  и  $\sin t$ :

$$\int_0^t f(\theta) \sin(t - \theta) d\theta = f(t) * \sin t = \sin t * f(t).$$

Выражение  $\frac{1}{k} \sin(t - \theta)$  есть функция *влияния* внешнего воздействия

$f(\theta)$ , осуществленного в момент времени  $\theta$ , на положение осциллятора в последующий момент  $t$ .

Решение уравнения вынужденных колебаний можно построить операционным методом, переходя от исходных функций времени (оригиналов) к их изображениям (функциям комплексного переменного  $P$ ) согласно формуле

$$x(t) \div X(P) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-Pt} dt.$$

Изображение свертки двух функций есть произведение их изображений:

$$f_1(t) * f_2(t) \div F_1(P) \cdot F_2(P).$$

**\*3.1.17. Гармонический осциллятор как звено САУ** (системы автоматического управления). Передаточная функция звена.

Построим изображения по Лапласу левой и правой частей уравнения вынужденных колебаний осциллятора (п. 3.1.15) *при нулевых начальных условиях* (!):

$$P^2 X(P) + k^2 X(P) = F(P),$$

откуда получаем формальное выражение

$$X(P) = \frac{1}{P^2 + k^2} F(P).$$

Это выражение описывает соотношение между сигналом  $F(P)$ , подаваемым на *вход* колебательного звена, и *выходным* сигналом  $X(P)$ . Выражение

$$W(P) = \frac{1}{P^2 + k^2}$$

называется *передаточной функцией* колебательного звена САУ. *Блок-схема* САУ изображает ее структуру; передаточные функции звеньев характеризуют преобразование этими звеньями входных сигналов в выходные. В приведенном на рис. 5 фрагменте блок-схемы звено 2 является *сумматором с отрицательной обратной связью*. Сигнал, подаваемый на затемненный сектор, *инвертируется*, т.е. подается на вход сумматора с противоположным

знаком. Звено 4 является, судя по передаточной функции, колебательным звеном с сопротивлением.

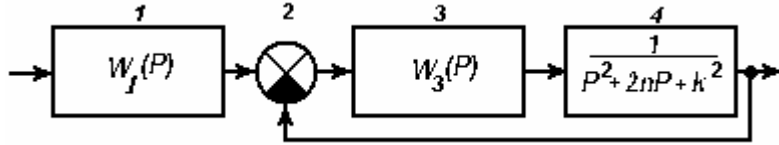


Рис. 5

**\*3.1.18. Вынужденные колебания гармонического осциллятора с сопротивлением**

Пусть дифференциальное уравнение движения осциллятора имеет вид:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = h \sin pt.$$

Частное решение этого уравнения, ввиду присутствия члена  $2n\dot{x}$ , ищем в виде  $B_1 \cos pt + B_2 \sin pt$ . Подставив это выражение в уравнение, получим, что чисто вынужденные колебания описываются формулой

$$x_3 = -h \frac{2np}{(k^2 - p^2) + (2np)^2} \cos pt + h \frac{k^2 - p^2}{(k^2 - p^2) + (2np)^2} \sin pt = B \sin(pt + \beta),$$

где  $B = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2) + (2np)^2}}$ .

Коэффициент динамичности  $\mu = \frac{B}{B_0} = \frac{1}{\sqrt{(1 - v^2)^2 + (2\eta v)^2}}$ ,

где, в дополнение к п. 3.1.14, обозначено  $\eta = \frac{n}{k}$ .

Исследуем возможность наличия экстремума этой функции:

$$\frac{d\mu}{dv} = \frac{v(1 - 2\eta^2 - v^2)}{((1 - v^2)^2 + (2\eta v)^2)^{3/2}} = 0.$$

Отсюда получаем  $v = 0$  или  $v = \sqrt{1 - 2\eta^2}$ . Последнее выражение

существует при условии  $\eta < \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Амплитудно-частотные характеристики

представляют собой зависящее от параметра  $\eta$  семейство кривых (рис.6).

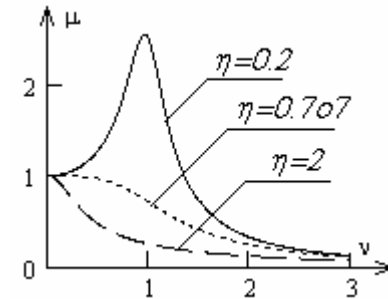


Рис. 6

Кривая, соответствующая значению  $\eta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , является *сепаратрисой*: она *разделяет* квадрант на две области. Верхняя область соответствует значительной реакции осциллятора на резонансную безразмерную частоту  $v = \sqrt{1 - 2\eta^2}$ .

**3.1.19. Примеры колебательного движения**

а) Пусть в начальный момент времени заряд  $q$  емкости (рис. 7,а) равен  $q_0$ , ключ разомкнут, и электрический ток  $i = \dot{q}$  в контуре отсутствует:  $\dot{q}_0 = 0$ . Ток возникает при замыкании ключа. Для составления уравнения функционирования контура воспользуемся вторым законом Кирхгофа: сумма падений напряжения в замкнутом контуре равна нулю:

$$U_L + U_C + U_R = 0.$$

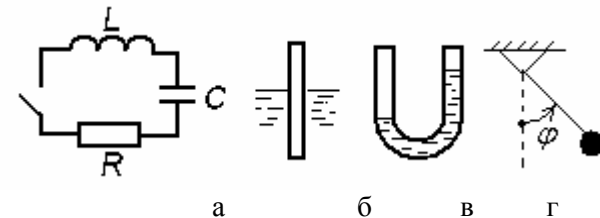


Рис. 7

Как известно из курса общей физики,  $U_C = \frac{q}{C}$ ,  $U_R = R\dot{q}$ ,

$U_L = L \frac{di}{dt} = L\dot{q}$  ( $C$  - параметр емкости,  $L$  - соленоида,  $R$  - активного сопротивления). Из закона Кирхгофа следует уравнение

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = 0,$$

где  $2n = \frac{R}{L}$ ,  $k^2 = \frac{1}{LC}$ . При малом активном сопротивлении

величина заряда, ток и напряжение изменяются согласно закону затухающих колебаний.

б) Вертикальные колебания цилиндрического поплавка (рис. 7,б) длиной  $l$  при отсутствии сопротивления жидкости описываются уравнением

$$\ddot{x} + \frac{\rho_{\Pi}}{\rho_{Ж}} \frac{g}{l} x = 0,$$

где  $x$  - смещение поплавка из положения равновесия,  $\rho_{\Pi}$  - плотность его материала,  $\rho_{Ж}$  - плотность жидкости.

в) Колебания столбика жидкости длиной  $l$  в  $U$  - образной трубке (рис. 7,в) описываются следующим уравнением (величина  $2x$  есть перепад уровней жидкости):

$$\ddot{x} + 2 \frac{g}{l} x = 0.$$

Аналогичным уравнением приближенно описываются колебания уровня жидкости в замкнутом прямоугольном резервуаре («сейша»).

г) Уравнение движения математического маятника (рис. 7,г):

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0.$$

Это уравнение является *нелинейным*, поскольку дифференциальный оператор  $D(\varphi) = \frac{d^2}{dt^2}(\varphi) + \frac{g}{l} \cdot \sin(\varphi)$  - нелинейный оператор (нелинейной является операция расчета синуса, поскольку  $\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \neq \sin \varphi_1 + \sin \varphi_2$ ). *Линейный* же оператор при любых константах  $a_1, a_2$  должен удовлетворять условию:

$$D(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) = a_1D(\varphi_1) + a_2D(\varphi_2).$$

Если угол  $\varphi$  - малая величина, то можно приближенно принять, что  $\sin \varphi \approx \varphi$ , и тогда дифференциальное уравнение движения маятника станет линейным:

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0,$$

где  $k^2 = \frac{g}{l}$ . Гармонический осциллятор иногда называют линейным осциллятором.

### 3.2. Геометрия масс. Теоремы динамики

#### 3.2.1. Центр масс (центр инерции) механической системы

Пусть механическая система состоит из  $n$  точечных фрагментов. Рассмотрим некоторую точку  $C$  пространства и пусть  $\vec{r}_{i,C}$  - радиус-вектор  $i$ -го фрагмента относительно полюса  $C$  (рис. 8). Вы-

ражение  $\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_{i,C}$  называется *статическим моментом масс* относительно полюса  $C$ . Центр масс системы - такая точка  $C$  пространства, относительно которой статический момент равен нулю:

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_{i,C} = 0.$$

Пусть  $\vec{r}_i = \vec{r}_{i,O}$  - радиус-вектор  $i$ -го фрагмента относительно полюса  $O$  абсолютной (инерциальной) системы отсчета,

$\vec{r}_C = \vec{r}_{C,O}$  - абсолютный радиус-вектор центра масс;

$\vec{r}_i = \vec{r}_{i,C} + \vec{r}_C$ . Тогда, обозначив как  $m = \sum_{i=1}^n m_i$  массу системы,

получим, что  $\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}$ .

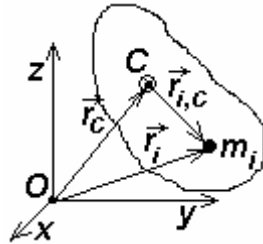


Рис. 8

Если тело имеет центр тяжести (центр системы параллельных сил), то он находится в центре масс.

### 3.2.2. Выражение количества движения системы через скорость центра масс. Уравнение движения центра масс.

Используя определение центра масс, находим, что количество движения системы выражается через скорость  $\vec{v}_C$  центра масс:

$$\vec{Q} = \sum m_i \vec{v}_i = \sum m_i \dot{\vec{r}}_i = m \dot{\vec{r}}_C = m \vec{v}_C.$$

Теорему об изменении количества движения (Ч. 1, п. 2.1.9) при условии  $m = const$  можно представить как уравнение движения центра масс:

$$m \vec{a}_C = \vec{F}^E.$$

### 3.2.3. Теоремы Кёнига

а) Пусть с центром масс связана подвижная система отсчета, движущаяся поступательно, т.е. каждый ее пункт имеет скорость  $\vec{V}_C$ . Тогда абсолютная кинетическая энергия механической системы равна

$$T = T_{абс} = \frac{mv_C^2}{2} + T_{отн},$$

где  $T_{отн}$  - кинетическая энергия относительного движения системы.

б) Кинетический момент абсолютного движения относительно неподвижного полюса  $O$  связан с кинетическим моментом относительно некоторого подвижного полюса  $C$  формулой

$$\vec{K}_O = \vec{r}_C \times m \vec{v}_C + \vec{K}_C.$$

Если  $C$  - центр масс, то  $\vec{K}_C = \vec{K}_{C,отн}$  - кинетический момент относительного движения.

### 3.2.4. Кинетическая энергия твердого тела в простейших случаях его движения. Момент инерции тела относительно оси

а) При поступательном движении твердого тела  $v_i = v$  при  $\forall i \Rightarrow$  кинетическая энергия его равна

$$T = \sum m_i \frac{v_i^2}{2} = m \frac{v^2}{2}.$$

б) При вращательном движении  $v_i = \omega h_i$  (см. Ч. 1, п. 1.2.8), где  $h_i$  - расстояние от  $i$ -ой точки до оси вращения  $\Rightarrow$

$$T = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i h_i^2 = I_z \frac{\omega^2}{2}.$$

Выражение  $\sum m_i h_i^2 = I_{zz} = I_z$  называется *моментом инерции* тела относительно оси вращения  $Oz$ ; оно характеризует разброс масс относительно оси  $Oz$  и служит мерой инерционности тела во вращательном движении вокруг этой же оси.

в) При плоскопараллельном движении тела (см. теорему Кёнига)

$$T = m \frac{v_C^2}{2} + I_{Cz} \frac{\omega^2}{2}.$$

$I_{Cz}$  - момент инерции тела относительно оси  $Cz$ , проходящей через центр масс  $C$  перпендикулярно плоскости движения. Если  $I_{Pz}$  - момент инерции тела относительно оси, проходящей через мгновенный центр скоростей  $P$ , то

$$T = I_{Pz} \frac{\omega^2}{2}.$$

**3.2.5. Кинетический момент вращающегося твердого тела** относительно неподвижной оси его вращения

Вектор  $\vec{Q}_i$  количества движения  $i$ -ой точки тела направлен так же, как и её скорость  $\vec{v}_i$  (см. ч. 1, рис. 3). По правилу расчета момента вектора относительно оси (ч. 1, п. 2.1.4) получим, что величина момента вектора  $\vec{Q}_i$  относительно оси вращения  $Oz$  равна  $Q_i h_i = m_i h_i^2 \omega$ . Знак момента определяется знаком проекции  $\omega_z$ . Кинетический момент всего тела относительно оси  $Oz$

$$K_z = \omega_z \sum m_i h_i^2 = I_z \omega_z = I_{zz} \omega_z.$$

**3.2.6. Кинетический момент и кинетическая энергия** твердого тела при его сферическом движении. **Тензор инерции**

При сферическом движении вокруг полюса  $O$  скорость  $i$ -ой точки твердого тела равна (см. ч. 1, п. 1.5.4)

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix} =$$

$$= (z_i \omega_y - y_i \omega_z) \vec{i} + (x_i \omega_z - z_i \omega_x) \vec{j} + (y_i \omega_x - x_i \omega_y) \vec{k}.$$

Тогда кинетический момент тела относительно полюса  $O$  равен  $\vec{K}_O = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i =$

$$= \left[ \omega_x \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum m_i x_i y_i - \omega_z \sum m_i x_i z_i \right] \vec{i} +$$

$$+ \left[ -\omega_x \sum m_i x_i y_i + \omega_y \sum m_i (x_i^2 + z_i^2) - \omega_z \sum m_i y_i z_i \right] \vec{j} +$$

$$+ \left[ -\omega_x \sum m_i x_i z_i - \omega_y \sum m_i z_i y_i + \omega_z \sum m_i (y_i^2 + x_i^2) \right] \vec{k}.$$

Выражение  $y_i^2 + z_i^2$  есть квадрат расстояния от  $i$ -ой точки до оси  $Ox$ , так что  $\sum m_i (y_i^2 + z_i^2) = I_{xx}$  - момент инерции тела относительно оси  $Ox$ .

Выражения  $\sum m_i x_i y_i = I_{xy} = I_{yx}$ ,  $\sum m_i x_i z_i = I_{xz} = I_{zx}$ ,  $\sum m_i y_i z_i = I_{yz} = I_{zy}$  называется центробежными моментами инерции.

$$\text{Симметричная матрица } J = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}.$$

матрица инерции - определяет тензор инерции тела в заданной точке.

Тензоры – математические объекты, которые возникли как обобщение понятия о векторах. Скаляр считается тензором нулевого ранга. Вектор в трехмерном пространстве - тензор первого ранга - представляет собой совокупность трех скаляров, перечисляемых в определенной последовательности (кортеж). Тензор второго ранга в трехмерном пространстве можно рассматривать как кортеж из трех векторов.

Пусть прямоугольная декартова система координат  $Ox'_1 x'_2 x'_3$  развернута относительно такой же системы  $Ox_1 x_2 x_3$ . Обозначим как  $a_{ij}$  косинусы углов между осями  $x'_i$  и  $x_j$ . Между проекциями  $p'_k$  некоторого вектора  $\vec{p}$ , рассчитанными относительно системы координат  $Ox'_1 x'_2 x'_3$ , и проекциями его  $p_l$  в системе  $Ox_1 x_2 x_3$  имеют место соотношения:

$$p'_k = \sum_{l=1}^3 a_{kl} p_l = a_{kl} p_l.$$

В такого рода записях символ суммирования опускается; по умолчанию принимается, что суммирование происходит по повторяющимся индексам (в данном случае по индексу  $l$ ). Говорят, что векторы  $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$  являются компонентами тензора  $P$ , если эти компоненты преобразуются по аналогичному правилу:  $\vec{p}'_k = a_{kl} \vec{p}_l$ . Таким образом, тензор  $P$  задается девятью скалярами

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix},$$

которые преобразуются по формуле  $p'_{kl} = a_{kr} a_{ls} p_{rs}$ .

Напряженно-деформированное состояние сплошного упругого тела характеризуется тензором напряжений и тензором деформаций (tendo (лат.) – напрягаю, натягиваю). Обобщенный закон Гука задает соотношения между компонентами этих тензоров через упругие параметры материала тела.

Если  $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  обозначает вектор-строку, а  $\vec{\omega}^*$  - транспонированный вектор (вектор-столбец), то можно записать

$$\vec{K}_O^* = J \vec{\omega}^*.$$

(Согласно правилу перемножения матриц результат умножения матрицы на столбец есть столбец; результат умножения строки на матрицу - строка.)

Сравним полученное выражение для  $\vec{K}_O^*$  с выражением для количества движения при поступательном движении  $\vec{Q} = m \vec{v}$ ; их структура одна и та же: произведение инерционного коэффициента на кинематический параметр тела.

Отметим, что при вращении тела вокруг неподвижной оси  $Oz$   $\vec{\omega} = (0, 0, \omega_z)$ , и тогда

$$\vec{K}_O^* = (-I_{xz} \omega_z, -I_{yz} \omega_z, I_{zz} \omega_z)^* \Rightarrow K_z = K_{Oz} = I_{zz} \omega_z$$

В выражении для кинетической энергии тела  $T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2}$  величины  $v_i^2 = \omega^2 h_i^2$  ( $h_i$  - расстояние от  $i$ -ой точки тела до мгновенной оси вращения  $Ol$ , вдоль которой направлен вектор  $\vec{\omega}$ ). Тогда

$$T = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i h_i^2 = I_{ll} \frac{\omega^2}{2},$$

где  $I_{ll}$  - момент инерции тела относительно мгновенной оси. С дру-

гой стороны, подставив в формулу  $T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2}$  приведенное выше выражение для вектора  $\vec{v}_i$ , получим

$$T = \frac{1}{2} (I_{xx} \omega_x^2 + I_{yy} \omega_y^2 + I_{zz} \omega_z^2 -$$

$$-2I_{yz}\omega_y\omega_z - 2I_{xz}\omega_x\omega_z - 2I_{xy}\omega_x\omega_y),$$

$$\text{или } T = \frac{1}{2}\vec{\omega}J\vec{\omega}^* = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L}_O^*.$$

Сравним: при поступательном движении твердого тела

$$T = \frac{1}{2}\vec{v}m\vec{v}^* = \frac{1}{2}\vec{v}\vec{Q}^*.$$

Рассмотрим орт направления мгновенной оси  $\vec{l}_0$ , такой, что

$$\vec{\omega} = \omega\vec{l}_0. \text{ Тогда } T = \frac{\omega^2}{2}\vec{l}_0J\vec{l}_0^*.$$

Из сравнения с вышеприведенной формулой следует, что момент инерции относительно оси  $Ol$  находится по формуле  $I_{ll} = \vec{l}_0J\vec{l}_0^*$ . Пусть ось  $Ol$  проходит через точку  $M$  на единичной сфере с центром  $O$ , имеющую координаты  $x, y, z$  - проекции орта  $\vec{l}_0$ . Тогда получим выражение

$$1 = \frac{1}{I_{ll}}(I_{xx}x^2 + I_{yy}y^2 + I_{zz}z^2 - 2I_{yz}yz - 2I_{xz}xz - 2I_{xy}xy).$$

Изменим масштаб расстояний. Если точку  $M$  на оси  $Ol$  брать на

расстоянии  $OM = \frac{1}{\sqrt{I_{ll}}}$ , то получим выражение

$$I_{xx}x^2 + I_{yy}y^2 + I_{zz}z^2 - 2I_{yz}yz - 2I_{xz}xz - 2I_{xy}xy = 1$$

Это уравнение поверхности второго порядка – *эллипсоида инерции*. Величины  $x, y, z$  - координаты точки  $M$  эллипсоида, при этом расстояние  $OM$  характеризует момент инерции относительно оси  $OM$  в соответствии с вышеприведенной формулой. Оси симметрии его называются *главными осями инерции*. Матрицу  $J$  квадратичной формы, определяющей левую часть уравнения эллипсоида,

можно с помощью *неособенного* преобразования, задающего поворот осей координат, привести к диагональному виду. Компоненты диагональной матрицы суть *главные моменты инерции*. Оси соответствующей системы координат называются *главными осями инерции*. Центробежные моменты относительно главных осей равны нулю.

Можно построить эллипсоид инерции с центром в любой точке тела. Если за центр принять центр масс тела, то оси инерции называются *центральными*.

**3.2.7. Теорема Гюйгенса-Штейнера** о соотношении между моментами инерции относительно двух параллельных осей, одна из которых – центральная

Пусть  $d$  - расстояние между осью  $Z$  и параллельной ей центральной осью  $Z_C$ ;  $m$  - масса тела (рис. 9,а). Моменты инерции связаны формулой:  $I_Z = I_{Z_C} + md^2$ .

**3.2.8. Моменты инерции относительно полюса и относительно плоскости**

Эти моменты инерции определяются аналогично осевым моментам формулой  $I = \sum m_i h_i^2$ , где  $h_i$  - расстояние от  $i$ -ой точки до полюса или до плоскости.

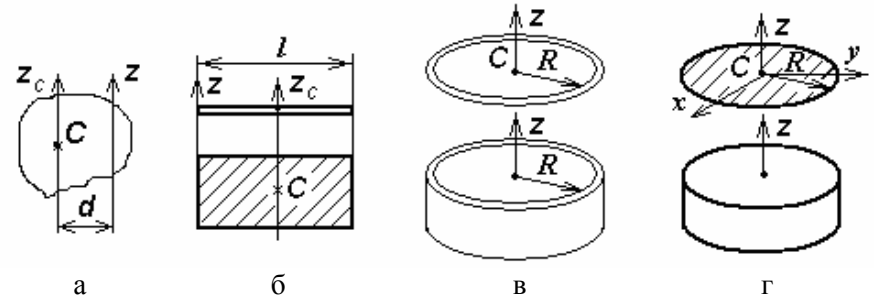


Рис. 9

Полярный момент инерции относительно начала  $O$  декартовой системы координат

$$I_O = \sum m_i(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2).$$



Моменты инерции относительно координатных плоскостей

$$I_{xOy} = \sum m_i z_i^2, \quad I_{xOz} = \sum m_i y_i^2, \quad I_{yOz} = \sum m_i x_i^2$$

Очевидны соотношения

$$I_O = I_{xOy} + I_{xOz} + I_{yOz} = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z).$$

### 3.2.9. Моменты инерции некоторых однородных тел

а) Стержень (прямоугольная пластина) постоянной толщины массой  $m$  и длиной  $l$  (рис. 9,б)

$$I_{Zc} = \frac{ml^2}{12}; \quad I_Z = \frac{ml^2}{3}.$$

б) Тонкий обруч (тонкостенная труба) радиуса  $R$  (рис. 9,в)

$$I_Z = mR^2.$$

в) Сплошной диск (цилиндр) радиуса  $R$  (рис. 9,г)

$$I_Z = \frac{1}{2}mR^2.$$

Используя формулы п.3.2.8, найдем моменты  $I_x = I_y = I$  для сплошного диска (рис. 9, г). Считаем толщину диска малой:  $z_i \approx 0$ , тогда

$$I_Z = I_O = \frac{1}{2}(2I + I_Z) \Rightarrow I = \frac{I_Z}{2} = \frac{1}{4}mR^2.$$

В некоторых задачах (например, в статических задачах по сопротивлению материалов) требуется рассчитать момент инерции некоторой фигуры (сечения), плотность которой  $\rho$  условно считается равной единице. Тогда, например, последний момент будет равен

$$I = \frac{1}{4}\pi R^4 \text{ (масса диска будет равна } \pi R^2 \rho = \pi R^2 \cdot 1).$$

### 3.2.10. Потенциальное силовое поле

Силовое поле – часть пространства (или все пространство), в каждом пункте которого определена, тем или иным физическим законом, сила, действующая на материальную точку, находящуюся в этом пункте.

Силовое поле называется потенциальным (имеющим *скалярный потенциал*), если существует дважды непрерывно дифференцируемая *силовая функция*  $\varphi = \varphi(x, y, z)$ , такая, что в каждой точке поля  $\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi = \vec{\nabla} \varphi$ , где символический вектор-оператор «набла» имеет следующий смысл:

$$\vec{\nabla}() = \frac{\partial()}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial()}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial()}{\partial z} \vec{k}.$$

Тогда работа силы  $\vec{F}$  при перемещении точки приложения силы из пункта 1 в пункт 2 равна (см. ч. 1, п. 2.1.7)

$$A_{1-2} = \int_{(1)}^{(2)} F_x dx + F_y dy + F_z dz =$$

$$= \int_{(1)}^{(2)} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = \int_{(1)}^{(2)} d\varphi = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Работа определяется только начальным и конечным значениями силовой функции и не зависит от формы траектории. Работа на замкнутой траектории (контуре) равна нулю. Выражение для работы вектора силы  $\vec{F}$  определяет *циркуляцию* этого вектора вдоль траектории точки приложения силы. В потенциальном поле циркуляция силы  $\vec{F}$  вдоль любого замкнутого контура равна нулю:

$$\oint \vec{F} d\vec{r} = 0.$$

Согласно формуле Стокса циркуляция вектора  $\vec{F}$  вдоль замкнутого контура, стягивающего поверхность малой величины (так что ее можно считать плоской), равна интегралу по площади от про-

екции ротора вектора  $\vec{F}$  на нормаль  $\vec{n}$  к этой поверхности (ориентированную соответственно направлению обхода контура):

$$\oint_l \vec{F} d\vec{r} = \iint_{(S)} (\overrightarrow{rot \vec{F}})_n dS.$$

Потенциальное силовое поле, задаваемое скалярным потенциалом  $\varphi$ , называется также *безвихревым*, поскольку в нем выполняется условие  $\overrightarrow{rot \vec{F}} = \vec{0}$  (равенство  $\overrightarrow{rot grad \varphi} = \vec{0}$  - известное в теории поля тождество).

*Ротор* (вихрь, он же *curl*) вектора  $\vec{F}$  определяется формулой

$$\overrightarrow{rot \vec{F}} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Поверхности вида  $\varphi(x, y, z) = C$ , на которых значение силовой функции постоянно и равно заданной константе  $C$ , называются *поверхностями уровня*, или *эквипотенциальными поверхностями*.

### 3.2.11. Потенциальная энергия

Потенциальная энергия  $\Pi$  тела (и механической системы вообще) складывается из потенциальных энергий отдельных его фрагментов.

Выберем одну из поверхностей уровня и назовем ее поверхностью *нулевого уровня* потенциальной энергии, т.е. на этой поверхности считается  $\Pi_0 = 0$ .

Потенциальная энергия малого фрагмента системы, находящегося в точке  $M_1$  поля, равна работе, совершаемой силой  $\vec{F}$  при перемещении фрагмента из точки  $M_1$  на поверхность нулевого уровня:  $\Pi_1 = A_{1-0} = \varphi_0 - \varphi_1$ . Тогда

$$\begin{aligned} A_{1-2} &= \varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_0 - \varphi_0 = \\ &= (\varphi_0 - \varphi_1) - (\varphi_0 - \varphi_2) = \Pi_1 - \Pi_2. \end{aligned}$$

Из сравнения с выражением  $A_{1-2} = \varphi_2 - \varphi_1$  следует, что

$$d\Pi = -d\varphi = -\delta A; \quad \Pi = C - \varphi.$$

**3.2.12. Работа силы тяжести.** Потенциальная энергия тяжелого тела

Пусть ось  $Oz$  направлена вертикально вверх. Работа постоянной силы  $m\vec{g}$ , приложенной в центре тяжести тела, равна

$$A_{1-2} = mg(z_1 - z_2), \text{ или } A_{1-2} = \pm mgh,$$

где  $h = |z_1 - z_2|$  - перепад высот между начальным и конечным положениями центра тяжести тела - малая величина сравнительно с радиусом Земли. Из формулы следует, что работа не зависит от формы траектории центра тяжести, следовательно, гравитационное поле потенциально. Потенциальная энергия тела зависит от положения его центра тяжести:  $\Pi = \Pi(z)$ . Пусть  $\Pi(0) = 0$ ; тогда  $\Pi = mgz$ .

Пусть  $g = G \frac{M}{z^2}$ , где  $G$  - гравитационная постоянная,  $M$  - масса Земли,  $z$  - расстояние от центра Земли до центра тяжести тела.

Пусть  $\Pi(\infty) = 0$ ; тогда  $\Pi = \Pi(z) = -G \frac{mM}{z}$ .

*Пример.* Пусть механическая система (рис. 10,а) состоит из трех тел массами  $m_1, m_2, m_3$ , невесомых нерастяжимых нитей и невесомых блоков. Она имеет 2 степени свободы; назначаем обобщенные координаты  $x_1, x_2$ , отсчитываемые от точек схода нитей. Потенциальная энергия системы есть функция  $\Pi = \Pi(x_1, x_2)$ . Пусть  $\Pi(0,0) = 0$ ; тогда

$$\Pi(x_1, x_2) = (m_2 + m_3 - m_1)gx_1 + (m_3 - m_2)gx_2.$$

**3.2.13. Работа упругой силы.** Потенциальная энергия упругого элемента

Пусть упругий элемент механической системы (напр., пружина) деформируется в соответствии с законом Гука (см. п. 3.1.8). Работа упругой силы определяется формулой

$$A_{1-2} = \frac{c}{2} (\Delta l_1^2 - \Delta l_2^2),$$

где  $c$  – коэффициент упругости,  $\Delta l_1$  – начальная деформация,  $\Delta l_2$  – конечная деформация пружины. Введем координату  $x = \Delta l$ , так что  $\Pi = \Pi(x)$ , и пусть  $\Pi(0) = 0$ . Тогда потенциальная энергия пружины  $\Pi(x) = \frac{c}{2} x^2$ .

*Пример.* Механическая система (рис. 10,б) состоит из двух тел массами  $m_1, m_2$ , перемещающихся по горизонтальной направляющей, и невесомых пружин, имеющих упругие параметры  $c_1, c_2$ . Назначаем обобщенные координаты  $x_1, x_2$ , означающие абсолютные смещения тел из их положений равновесия (когда пружины не деформированы). Здесь потенциальная энергия  $\Pi = \Pi(x_1, x_2)$ . Положим  $\Pi(0,0) = 0$ ; тогда получим, что

$$\Pi(x_1, x_2) = \frac{c_1}{2} x_1^2 + \frac{c_2}{2} (x_2 - x_1)^2 = \frac{(c_1 + c_2)}{2} x_1^2 - c_2 x_1 x_2 + \frac{c_2}{2} x_2^2$$
 - квадратичная форма относительно обобщенных координат.

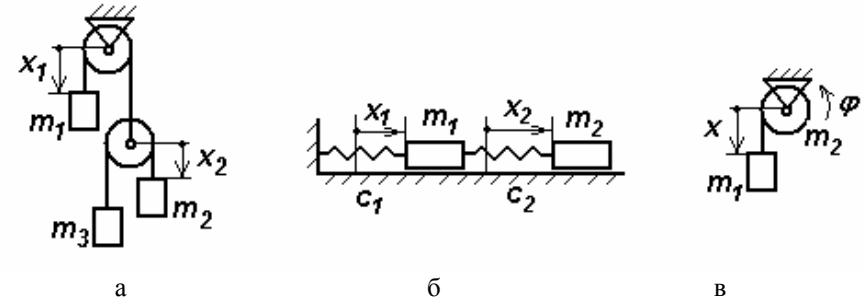


Рис. 10

### 3.2.14. О кинетической энергии механической системы

Кинетическую энергию находим как сумму кинетических энергий частей системы. Если система имеет одну степень свободы, и кинетическая энергия представлена как функция скорости какого-либо элемента системы, то суммарный инерционный коэффициент называют *приведенным* к данному элементу.

*Пример.* Механическая система (рис. 10,в) состоит из двух тел массами  $m_1, m_2$ ; она имеет одну степень свободы. В качестве обобщенной можно назначить координату  $x$ .

Производная от обобщенной координаты по времени называется *обобщенной скоростью* системы. Принимая барабан за однородный сплошной цилиндр, представим кинетическую энергию системы в виде

$$T = \left( m_1 + \frac{m_2}{2} \right) \frac{\dot{x}^2}{2} = \mu \frac{\dot{x}^2}{2} = \mu \frac{v^2}{2},$$

где  $v$  – величина скорости тела 1. Здесь выражение  $\mu = m_1 + \frac{m_2}{2}$  является *приведенной к телу 1 массой* системы.

Приняв за обобщенную скорость величину  $\dot{\phi} = \frac{\dot{x}}{R}$ , получим

$$T = \left( m_1 + \frac{m_2}{2} \right) R^2 \frac{\dot{\phi}^2}{2} = J \frac{\dot{\phi}^2}{2} = J \frac{\omega^2}{2}.$$

Выражение  $J = (m_1 + \frac{m_2}{2})R^2$  называется *приведенным к телу 2 моментом*

*инерции* системы (относительно оси вращения тела).

Кинетическая энергия систем, изображенных на рис. 10, является квадратичной формой обобщенных скоростей:

рис. 10,а:

$$T = (m_1 + m_2 + m_3) \frac{\dot{x}_1^2}{2} + (m_3 - m_2) \dot{x}_1 \dot{x}_2 + (m_2 + m_3) \frac{\dot{x}_2^2}{2},$$

рис. 10,б:  $T = m_1 \frac{\dot{x}_1^2}{2} + m_2 \frac{\dot{x}_2^2}{2}.$

### 3.2.15. Теорема об изменении кинетической энергии

Эта теорема динамики применяется в задачах механики, когда

- условие задачи сформулировано в терминах сила – скорость – перемещение;
- требуется исключить реакции идеальных связей (не совершающие работы);
- в задаче используются постулаты иных разделов физики (понятие энергии существует не только в механике).

Силы удобно разбить на два класса: внешние и внутренние.

В дифференциальной форме

$$dT = \delta A^E + \delta A^I \text{ или } \frac{dT}{dt} = N^E + N^I$$

( $N^E + N^I$  - суммарная мощность внешних и внутренних сил) теорема об изменении кинетической энергии применяется для исследования мгновенного состояния механической системы.

В интегральной форме теорема применяется, когда требуется сравнить состояния системы в начальном и конечном ее положениях:

$$T_2 - T_1 = A_{1-2}^E + A_{1-2}^I.$$

Здесь  $T_1$  - кинетическая энергия системы в начальном положении,  $T_2$  - в конечном положении,  $A_{1-2}^E$  и  $A_{1-2}^I$  - работа внешних

и внутренних сил при перемещении системы из начального положения в конечное положение.

### 3.2.16. Теорема об изменении количества движения. Импульсные функции.

Теорема об изменении количества движения. применяется в условиях, когда

- исследуется поступательное движение тел системы;
- требуется исключить внутренние силы;
- в условии задачи фигурирует время движения;
- существенна информация о направлении движения;
- задаются импульсы сил как таковые (без разделения на собственно силу и время).

Дифференциальные формы записи теоремы:

а)  $\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}^E,$

б)  $m\vec{a}_C = \vec{F}^E$  (теорема о движении центра масс),

в)  $d\vec{Q} = d\vec{S}^E,$

где  $d\vec{S}^E$  - суммарный элементарный импульс внешних сил.

Теорема об изменении кол-ва движения в интегральной форме

$$\vec{Q}_2 - \vec{Q}_1 = \vec{S}_{1-2}^E,$$

где  $\vec{S}_{1-2}^E = \int_{t_1}^{t_2} d\vec{S}^E$  - суммарный импульс внешних сил, приобретенный системой за время перехода из начального состояния 1 в конечное состояние 2.

Удар тел друг о друга происходит в течение очень малого промежутка времени, и зависимость ударной силы от времени на этом промежутке установить затруднительно. Анализ таких явлений можно производить с использованием *импульсных функций*. Определим функцию  $\delta_\tau$  (рис. 11,а):

$$\delta_\tau = 0 \text{ при } t < 0; \quad \delta_\tau = \frac{1}{\tau} \text{ при } t \in [0, \tau]; \quad \delta_\tau = 0 \text{ при } t > \tau.$$

При этом величина интеграла  $\int_0^{\infty} \delta_{\tau} dt = \frac{1}{\tau} \tau = 1$ .

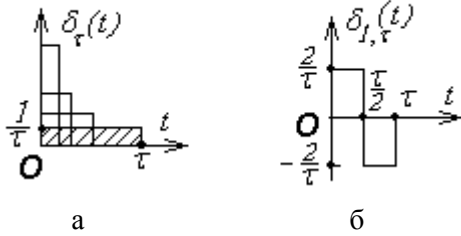


Рис. 11

$\delta$ -функцией Дирака (импульсной функцией нулевого порядка) на-

зывается функция  $\delta(t) = \delta_0(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \delta_{\tau}$ ; при этом  $\int_0^{\infty} \delta(t) dt = 1$ .

В теории обобщенных функций  $\delta$ -функция определяется как производная от ступенчатой  $\eta$ -функции:  $\delta_0(t) = \dot{\eta}(t)$ . В свою очередь, производной от импульсной функции нулевого порядка является импульсная функция первого порядка:  $\delta_1(t) = \dot{\delta}_0(t)$  и т.д. Каждая импульсная функция может быть определена отдельно, подобно вышеприведенному определению функции нулевого порядка (рис. 11,б). При исследовании процессов, происходящих во времени,  $\eta$ -функция считается безразмерной. Тогда  $\delta$ -функция нулевого порядка имеет размерность  $c^{-1}$ ,  $\delta_1$  - размерность  $c^{-2}$  и т.д.

Пусть гармонический осциллятор при нулевых начальных условиях испытывает внешнее силовое воздействие, выражающееся приложенным в момент времени  $t=0$  импульсом силы  $S_x$ . Уравнение движения:

$m\ddot{x} + cx = S_x \delta(t)$ , или  $\ddot{x} + k^2 x = \frac{S_x}{m} \delta(t)$ . Построим изображения по

Лапласу левой и правой частей уравнения:

$$(P^2 + k^2)X(P) = \frac{S_x}{m} \cdot 1; \text{ отсюда}$$

$$X(P) = \frac{S_x}{m} \frac{1}{P^2 + k^2} = \frac{S_x}{km} \frac{k}{P^2 + k^2}.$$

Переходим к оригиналам:  $X(P) \div x(t) = \frac{S_x}{km} \sin kt$

(Согласно таблице оригиналов и изображений

$$\delta(t) \div 1; \quad \sin kt \div \frac{k}{P^2 + k^2}).$$

Решение соответствует начальному скачку скорости величиной  $v_0 = S_x / m$ .

**3.2.17. Теорема об изменении кинетического момента** используется в условиях, аналогичных п. 3.2.16, но для исследования вращательного движения.

Интегральная форма записи теоремы:

$$\vec{K}_{O,2} - \vec{K}_{O,1} = \vec{M}_O(\vec{S}_{1-2}^E),$$

где  $\vec{M}_O(\vec{S}_{1-2}^E)$  - суммарный момент импульсов внешних сил относительно полюса  $O$ .

Теорему об изменении кинетического момента (см. п. 2.1.9) можно записать в проекциях на ось  $Oz$ :

$$\dot{K}_z = M_z^E,$$

где  $K_z$  - кинетический момент системы относительно оси  $Oz$ ,

$M_z^E$  - главный момент внешних сил относительно оси  $Oz$ .

Применительно к вращающемуся вокруг неподвижной оси  $Oz$  твердому телу получаем уравнение динамики вращающегося твердого тела:

$$I_z \varepsilon_z = M_z^E, \text{ или } I_z \frac{d\omega_z}{dt} = M_z^E, \text{ или}$$

$$I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_z^E.$$

Каждая из последних двух записей называется *дифференциальным уравнением* вращательного движения тела.

**3.2.18. Физический маятник** – твердое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через его центр тяжести. Дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$I_z \ddot{\varphi} = -mgh \sin \varphi,$$

где  $\varphi$  - угол отклонения маятника от вертикального его положения – положения устойчивого равновесия,  $h$  - расстояние от центра тяжести до оси вращения  $Oz$ . Это нелинейное дифференциальное уравнение.

Рассмотрим *малые* колебания маятника вблизи положения устойчивого равновесия, считая значения функции  $\varphi(t)$  и ее производных малыми величинами одинакового порядка. С точностью до малых второго порядка включительно получаем приближенное дифференциальное уравнение движения

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgh}{I_z} \varphi = 0.$$

Это - линейное уравнение гармонического осциллятора. Отбросив величины высоких порядков малости, мы *линеаризовали* задачу.

Линеаризованное дифференциальное уравнение малых колебаний математического маятника (см. п. 3.1.19) имеет вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0 \quad (l - \text{длина маятника}).$$

Сравним уравнения малых колебаний математического и физического маятников. Величина  $\frac{I_z}{mh}$  называется *приведенной длиной* физического маятника.

Если маятник – однородный стержень длиной  $l$ , то  $l_* = \frac{2}{3}l$ .

### \*3.2.19. Центр удара

Пусть твердое тело вращается вокруг оси  $Oz$ , будучи закреплено в точках  $A$  и  $B$  (рис. 12). В точке, лежащей на оси  $Ox$  на некотором расстоянии  $d$ , прикладывается мгновенная

сила, импульс которой равен  $\vec{S}$ . Рассмотрим вопрос о нахождении вызванных этим ударом ударных реакций опор  $\vec{S}_A$  и  $\vec{S}_B$ . Теорема об изменении количества движения (п. 3.1.16) дает выражение

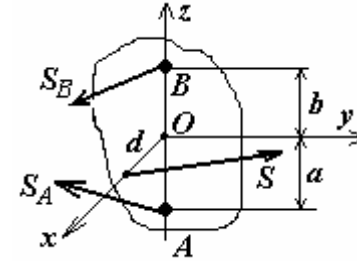


Рис. 12

$$\vec{Q}_2 - \vec{Q}_1 = \vec{S}_{1-2}^E = \vec{S} + \vec{S}_A + \vec{S}_B.$$

Количество движения тела  $\vec{Q} = m\vec{v}_C$ , где  $\vec{v}_C = \vec{\omega} \times \vec{r}_C$ . Записав теорему в проекции на оси, получим:

$$-m y_C (\omega_z - \omega_{z,0}) = S_x + S_{A,x} + S_{B,x};$$

$$m x_C (\omega_z - \omega_{z,0}) = S_y + S_{A,y} + S_{B,y};$$

$$0 = S_z + S_{A,z} + S_{B,z}.$$

Здесь  $\omega_z, \omega_{z,0}$  означают проекции угловой скорости после и до удара.

Согласно п.3.2.6 кинетический момент вращающегося тела равен

$$\vec{K}_O = \omega_z (-I_{xz}, -I_{yz}, I_{zz}) = -I_{xz} \omega_z \vec{i} - I_{yz} \omega_z \vec{j} + I_{zz} \omega_z \vec{k}.$$

Интегральная форма записи теоремы об изменении кинетического момента в проекциях на оси дает нам уравнения

$$-I_{xz} (\omega_z - \omega_{z,0}) = a S_{A,y} - b S_{B,y};$$

$$-I_{yz} (\omega_z - \omega_{z,0}) = -d S_z - a S_{A,x} + b S_{B,x};$$

$$I_{zz} (\omega_z - \omega_{z,0}) = d S_z.$$

Пусть должны обращаться в нуль ударные реакции  $S_{A,x}, S_{B,x}, S_{A,y}, S_{B,y}, S_{A,z} + S_{B,z}$ . Тогда из шести уравнений движения следует:

- 1)  $x_C S_x + y_C S_y = 0$ , т.е. удар должен быть направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через центр тяжести и ось вращения;
- 2)  $I_{xz} = I_{yz} = 0$ , т.е. ось  $Oz$  должна быть главной осью инерции;
- 3)  $d = \frac{I_{zz}}{m x_C}$ . Это выражение есть приведенная длина физического маятника, при условии, что ось  $Ox$  проведена через центр тяжести.

### \*3.2.20. Приближенная теория гироскопа

Гироскопом («указателем вращения») называют твердое тело, имеющее ось симметрии, и совершающее вращение вокруг точки, принадлежащей этой оси. Примем эту ось за ось  $Oz$  собственного вращения. Угловая скорость  $\Omega = |\dot{\phi}|$  собственного вращения гироскопа весьма велика, так что составляющая  $K_z$  кинетического момента превалирует над другими составляющими. Пусть гироскоп в начале движения имеет угловую скорость  $\vec{\omega} = \vec{\Omega}$ , так что его кинетический момент  $\vec{K}_O = I_{zz} \vec{\Omega}$ . Приближенная теория гироскопа исследует его движение при малой прецессии и нутации и предполагает, что величина  $K_O$  остается практически неизменной. Когда вектор  $\vec{K}_O$  поворачивается с угловой скоростью  $\vec{\omega}_*$ , производная от этого вектора вычисляется по формуле Эйлера-Пуассона  $\dot{\vec{K}}_O = \vec{\omega}_* \times I_{zz} \vec{\Omega}$  как скорость конца вектора  $\vec{K}_O$  (интерпретация Резаля). Согласно теореме об изменении кинетического момента эта скорость равна моменту внешних сил  $\vec{M}_O^E$ , называемому здесь гироскопическим моментом.

### \*3.2.21. Удар материальной точки о преграду

Взаимодействие двух твердых тел в результате *кратковременного* контакта друг с другом называется ударом. Обозначим через  $\tau$  продолжительность удара. Сила взаимодействия  $F$  при ударе может достигать большой величины, но при этом ударный импульс

$S_{y\partial} = \int_0^{\tau} F dt$  имеет конечную величину. При ударе происходит

деформирование соударяющихся тел, сопровождающееся распространением внутри них волн упругих деформаций. Эти волны, отражаясь от свободных поверхностей и интерферируя, создают сложную картину распределения напряжений внутри тел. Величина  $\tau$  зависит от этих факторов, как и от скоростей сближения тел. Например, продолжительность соударения двух латунных шаров диаметром 26 мм при относительной скорости сближения 74 мм/с равна  $\tau = 2 \cdot 10^{-4}$  с.

Пусть тело малых размеров, принимаемое за материальную точку массой  $m$ , двигавшееся со скоростью  $\vec{V}$ , ударяется о неподвижную преграду (о тело бесконечно большой массы) и отскакивает от преграды со скоростью  $\vec{u}$ .

Считая, что ударные силы значительно превосходят другие силы, приложенные к материальной точке, пренебрежем импульсами этих других сил. Запишем теорему об изменении количества движения материальной точки:

$$m\vec{u} - m\vec{v} = \vec{S}_{y\partial}.$$

В простейших задачах об ударе будем пренебрегать и импульсом силы трения, так что проекция скорости точки на касательную плоскость к поверхности преграды не изменяется. Тогда для нормальной составляющей скорости имеем  $mu_n - mv_n = S_{y\partial,n}$ . Поскольку определение ударного импульса выходит за рамки теоретической механики, введем гипотезу (Ньютона):

$$\left| \frac{u_n}{v_n} \right| = k,$$

где величина  $k$  называется *коэффициентом восстановления* и считается заранее известной для данного сочетания материалов и форм тел. Этот коэффициент не зависит от скоростей тел и их размеров.

Тогда  $|S_{y\partial,n}| = m|v_n|(1+k)$ .

Коэффициент восстановления принимает значения  $0 \leq k \leq 1$ . Если  $k = 1$ , то удар называется *абсолютно упругим*, если  $k = 0$ , то удар называется *абсолютно неупругим*.

### \*3.2.22. Прямой удар двух тел

Пусть два тела массами  $m_1$  и  $m_2$  движутся вдоль оси  $Ox$  и ударяются друг о друга (рис. 14).

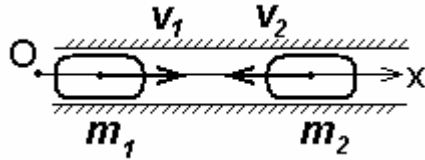


Рис. 14

Пусть их скорости до удара равны  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  (ось  $Ox$  направлена в сторону скорости  $\vec{v}_1$ ). Требуется найти их скорости  $\vec{u}_1$  и  $\vec{u}_2$  после удара. Коэффициент восстановления выразим здесь через относительные скорости:  $k = \frac{u_{2x} - u_{1x}}{v_{1x} - v_{2x}}$  (удар возможен, если тела сближаются, так что знаменатель данной дроби положителен).

Применим теорему об изменении количества движения к механической системе, состоящей из соударяющихся тел. Ударные силы здесь внутренние силы, и их импульс равен нулю. Следовательно

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x}.$$

Используя эту формулу и выражение для коэффициента  $k$ , находим скорости тел после удара:

$$u_{1x} = \frac{(m_1 - km_2)v_{1x} + m_2(1+k)v_{2x}}{m_1 + m_2};$$

$$u_{2x} = \frac{m_1(1+k)v_{1x} + (m_2 - km_1)v_{2x}}{m_1 + m_2}.$$

При абсолютно неупругом ударе скорости после удара одинаковы.

При абсолютно упругом ударе тела одинаковой массы  $m_1 = m_2$  обмениваются скоростями:

$$u_{1x} = v_{2x}, \quad u_{2x} = v_{1x}.$$

Обычно рассматривают два этапа удара. Первый этап – от начального соприкосновения соударяющихся тел до их наибольшей деформации, когда относительная их скорость становится равной ну-

лю, и тела приобретают общую скорость (равную скорости центра масс, которая остается неизменной в процессе удара). Обозначим величину ударного импульса первого этапа как  $S_I$ . Второй этап – частичное или полное упругое восстановление формы и приобретение телами скоростей  $\vec{u}_1$  и  $\vec{u}_2$ .

Пусть второму этапу соответствует ударный импульс  $S_{II}$ . Тогда оказывается, что  $\frac{S_{II}}{S_I} = k$ .

Кинетическая энергия системы тел до удара равна  $T_I = \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)$ , а после удара  $T_{II} = \frac{1}{2}(m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2)$ .

Выражение  $T_* = \frac{1}{2}m_1(v_{1x} - u_{1x})^2 + \frac{1}{2}m_2(v_{2x} - u_{2x})^2$  называют кинетической энергией, соответствующей *потерянным скоростям*  $v_{1x} - u_{1x}$  и  $v_{2x} - u_{2x}$ .

Имеет место соотношение  $T_I - T_{II} = \frac{1-k}{1+k} T_*$ .

При абсолютно упругом ударе  $T_{II} = T_I$ , а при абсолютно неупругом  $T_I - T_{II} = T_*$ .

### 3.3. Метод кинетостатики

#### 3.3.1. Приведение сил инерции, приложенных к твердому телу, к простейшему виду

Главный вектор сил инерции равен производной по времени от количества движения  $\vec{Q}$  с противоположным знаком:

$$\vec{\Phi} = -\dot{\vec{Q}} = -m \vec{a}_C,$$

где  $m$  - масса тела,  $\vec{a}_C$  - ускорение центра масс.

Главный момент сил инерции относительно неподвижного полюса  $O$ :

$$\vec{M}_O^\Phi = -\dot{\vec{K}}_O,$$



где  $\vec{K}_O$  - кинетический момент тела относительно полюса  $O$ .

(Кинетический момент относительно подвижного полюса определяется с помощью теоремы Кёнига).

### 3.3.2. Уравнения кинестатики твердого тела

Для механической системы, состоящей из  $n$  материальных точек, можно составить  $n$  уравнений кинестатики в векторной форме:

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i + \vec{\Phi}_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Здесь  $\vec{F}_i$  - равнодействующая активных сил, приложенных к  $i$ -ой точке системы,  $\vec{R}_i$  - равнодействующая реакций связей,  $\vec{\Phi}_i$  - сила инерции. Совершая алгебраические действия над этими уравнениями, можно получить различные следствия из них, например:

а) главный вектор всех сил (задаваемых сил, реакций и сил инерции) равен нулю:

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi} = 0.$$

б) главный момент всех сил относительно неподвижного полюса  $O$  равен нулю:

$$\vec{M}_O^F + \vec{M}_O^R + \vec{M}_O^\Phi = 0.$$

Последние два уравнения являются уравнениями кинестатики твердого тела. Записав их в проекциях на оси декартовой системы координат, получим 6 скалярных уравнений, что соответствует шести степеням свободы твердого тела в общем случае его движения.

**3.3.3. Дифференциальные уравнения движения твердого тела** можно вывести, например, из теорем об изменении количества движения (теорема о движении центра масс) и кинетического момента.

*Поступательное* движение тела описывается уравнениями

$$m\ddot{x}_C = \sum F_{i,x}^E, \quad m\ddot{y}_C = \sum F_{i,y}^E, \quad m\ddot{z}_C = \sum F_{i,z}^E,$$

где  $x_C, y_C, z_C$  - координаты центра масс,  $F_{i,x}^E, F_{i,y}^E, F_{i,z}^E$  - проекции внешних сил (задаваемых сил и реакций связей).

*Вращение* тела вокруг неподвижной оси описывается уравнением

$$I_{ZZ}\ddot{\varphi} = \sum M_Z(\vec{F}_i^E),$$

где  $I_{ZZ}$  - момент инерции тела относительно оси вращения  $Oz$ ,  $\varphi$  - угол поворота тела, согласованный по направлению с осью  $Oz$ ,  $M_Z(\vec{F}_i^E)$  - момент внешней силы относительно оси  $Oz$ .

*Плоскопараллельное* движение тела описывается уравнениями  $m\ddot{x}_C = \sum F_{i,x}^E, \quad m\ddot{y}_C = \sum F_{i,y}^E, \quad I_{ZZ}\ddot{\varphi} = \sum M_Z(\vec{F}_i^E)$ , где  $I_{ZZ}$  - момент инерции тела относительно некоторой оси  $Oz$ , перпендикулярной плоскости движения.

Дифференциальные уравнения *сферического* движения содержат в своем выражении компоненты тензора инерции и проекции угловой скорости. Эти уравнения могут быть проинтегрированы в квадратурах только в специальных случаях.

Дифференциальные уравнения движения *свободного* твердого тела составляют обычно как уравнения движения центра масс и уравнения сферического движения вокруг центра масс.

#### 4. Аналитическая механика

##### 4.1. Классификация связей

Рассмотрим связи, заданные аналитически. Связи выражают условия, накладываемые на положения и скорости  $n$  точек, составляющих механическую систему.

А) Пусть условия связей заданы как  $l$  неравенств:

$$f_k(t, x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{z}_n) = \\ = f_k(t, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \dots, \dot{\vec{r}}_n) \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, l.$$

Связи в этом случае называются *ограничивающими*. Если условия связи заданы в виде равенств – уравнений связей

$$f_k(t, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \dots, \dot{\vec{r}}_n) = 0,$$

то связи называются *удерживающими* (или напряженными).

Будем далее изучать механические системы, подчиненные удерживающим связям.

Б) Если уравнения связей явно содержат время, то связи называются *нестационарными* (или реономными – «текучими»). Иначе связи называются *стационарными* (или склерономными – «жесткими»).

В) Если уравнения связей содержат производные от координат, то связи называются *дифференциальными*, иначе они называются *позиционными*.

Если уравнения дифференциальных связей как дифференциальные уравнения относительно координат удастся разрешить (проинтегрировать), то дифференциальные связи называются интегрируемыми. Механическая система, подчиненная позиционным или дифференциальным интегрируемыми связям, называется *голономной* ( $\delta\lambda\omicron\zeta$  – весь, целый;  $\nu\delta\mu\omicron\zeta$  – закон).

Г) Если реакции связей совершают нулевую работу при любых виртуальных перемещениях точек механической системы (см. ниже), то связи называются *идеальными*, иначе – неидеальными.

##### 4.2. Виртуальные перемещения. Обобщенные силы

4.2.1. *Виртуальные перемещения* – это бесконечно малые перемещения  $\delta\vec{r}_i$  точек механической системы, совместимые со связями (удовлетворяющие уравнениям связей), совершаемые в окрест-

ности рассматриваемого положения системы при мгновенно остановленных («замороженных») связях (если они нестационарные). Символ « $\delta$ » означает изохронную вариацию функции  $\vec{r}_i$  (радиус-вектора  $i$ -ой точки системы) – бесконечно малое приращение этой функции при фиксированном значении аргумента функции  $t$ . Вариация функции одной или нескольких переменных рассчитывается по тем же правилам, как и ее дифференциал, но при условии  $\delta t = 0$ . Виртуальные перемещения при стационарных связях называются также *возможными*.

Сумму элементарных работ задаваемых сил  $\vec{F}_i$  на виртуальных (возможных) перемещениях точек механической системы будем называть виртуальной (возможной) работой задаваемых сил:

$$\delta A_F = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta\vec{r}_i. \text{ Виртуальная работа реакций связей } \vec{R}_i \text{ есть ве-}$$

$$\text{личина } \delta A_R = \sum_{i=1}^n \vec{R}_i \delta\vec{r}_i, \text{ а виртуальная работа даламберовых сил}$$

инерции

$$\delta A_\Phi = \sum_{i=1}^n \vec{\Phi}_i \delta\vec{r}_i = - \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i \delta\vec{r}_i.$$

##### 4.2.2. Идеальные связи

Идеальными называют связи, реакции которых не совершают работу на виртуальных перемещениях точек системы, т.е. виртуальная работа реакций равна нулю при любом наборе из  $n$  векторов  $\delta\vec{r}_1, \delta\vec{r}_2, \dots, \delta\vec{r}_n$  (сокращенно обозначим последнее условие как  $\forall \delta\vec{r}_i$ ):

$$\delta A_R = \sum_{i=1}^n \vec{R}_i \delta\vec{r}_i = 0; \quad \forall \delta\vec{r}_i.$$

##### 4.2.3. Принцип виртуальных перемещений (ПВП)

Для того, чтобы некоторое положение механической системы, подчиненной идеальным связям, было положением равновесия, не-

обходимо и достаточно, чтобы виртуальная работа задаваемых сил  $\vec{F}_i$  в этом положении была равна нулю:

$$\delta A_F = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = 0; \forall \delta \vec{r}_i.$$

#### 4.2.4. Общее уравнение динамики системы

В каждый момент времени движения механической системы, подчиненной идеальным связям, сумма виртуальных работ задаваемых сил и сил инерции равна нулю:

$$\delta A_F + \delta A_\Phi = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^n \vec{\Phi}_i \delta \vec{r}_i = 0; \forall \delta \vec{r}_i.$$

#### 4.2.5. Обобщенные силы

Пусть механическая система состоит из  $n$  точек и имеет  $S$  степеней свободы, так что положение системы определяется ее обобщенными координатами  $q_1, q_2, \dots, q_S$ . Пусть радиус-векторы  $\vec{r}_i$  точек системы заданы как функции обобщенных координат и времени (зависимость от времени характерна для нестационарных связей):

$$\vec{r}_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \vec{i} + y_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \vec{j} + z_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \vec{k} = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t).$$

Вариация  $i$ -го радиус-вектора равна

$$\delta \vec{r}_i = \sum \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j (\delta t = 0).$$

Составим выражение для виртуальной работы задаваемых сил:

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \sum_{j=1}^S \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j =$$

$$= \sum_{j=1}^S \left( \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_{j=1}^S Q_j \delta q_j.$$

Величина  $Q_j = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$  называется обобщенной силой,

соответствующей обобщенной координате  $q_j$ .

Обобщенную силу  $Q_j$  можно найти следующим образом.

1) Фиксируем все обобщенные координаты, за исключением  $q_j$ :

$$\delta q_1 = \delta q_2 = \dots = \delta q_{j-1} = \delta q_{j+1} = \dots = \delta q_S = 0,$$

а координате  $q_j$  придаем приращение  $\delta q_j > 0$ .

2) Выражаем через  $\delta q_j$  перемещения точек приложения задаваемых сил и находим суммарную виртуальную работу  $\delta A_{F,j}$  этих сил. Коэффициент при общем множителе  $\delta q_j$  в выражении этой

«парциальной» работы и есть  $j$ -я обобщенная сила  $Q_j = \frac{\delta A_{F,j}}{\delta q_j}$ .

Для определения потенциальной обобщенной силы надо представить потенциальную энергию системы в виде функции обобщенных координат  $\Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_S)$ , и тогда  $j$ -я обобщенная сила равна  $Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}$ .

Работу силы сопротивления будем считать отрицательной величиной при любом возможном перемещении точки приложения силы.

#### 4.2.6. Классы обобщенных сил

Потенциальные силы определяются известным уже нам усло-

вием:  $\exists$  функция  $\Pi = \Pi(q, t)$ , такая, что  $Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}$ .

Гироскопические силы определяются условием

$$N_g = \sum_{j=1}^S Q_j \dot{q}_j = 0, \text{ т.е. в любой момент времени суммарная}$$

мощность таких сил равна нулю.

Диссипативные силы характерны тем, что их суммарная мощность  $N_d \leq 0$ .

Если связи стационарны, а на систему действуют только потенциальные и гироскопические силы, то система *консервативна*, т.е. полная механическая энергия  $E = T + \Pi = \text{const}$ . Если поми-

мо этих сил действуют диссипативные силы, то  $\frac{dE}{dt} \leq 0$ .

#### 4.2.7. Выражение ПВП в терминах обобщенных сил

Для того чтобы некоторое положение механической системы было бы положением равновесия, необходимо и достаточно, чтобы в этом положении все обобщенные силы обращались в нуль:

$$Q_1 = Q_2 = \dots = Q_S = 0.$$

*Пример.* Механическая система состоит из грузов, нитей и блоков (рис.15,а). Скольжение нитей по ободьям блоков считается отсутствующим.

Массы тел обозначены соответственно как  $m_1, m_2, \dots, m_6$ . Требуется найти условия равновесия системы.

Определим число степеней системы и назначим обобщенные координаты. Положение груза 1 можно задать координатой  $X_1$ , которую удобно отсчитывать от конструктивно заданного начала – точки схода нити

с блока. Зафиксируем координату  $X_1$ . При неподвижном грузе 1 возможно движение груза 2 и блока 6, который при этом как бы катится без скольжения по левой ветви нити. Следовательно, число степеней свободы системы

больше единицы. Введем координату  $X_2$ . Если зафиксировать координаты  $X_1$  и  $X_2$ , то движение системы невозможно. Следовательно, число степеней свободы равно 2, а величины  $X_1$  и  $X_2$  можно принять за обобщенные координаты данной системы.

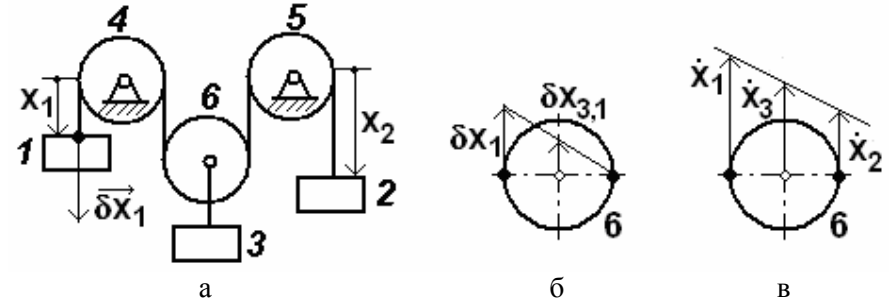


Рис. 15

Определим обобщенную силу  $Q_1$ , соответствующую координате  $X_1$ . Рассмотрим положение системы, соответствующее произвольным значениям координат  $X_1$  и  $X_2$ . Фиксируем координату  $X_2$ , а координате  $X_1$  придадим положительное приращение  $\delta X_1$  (рис.15,б). Груз 3 и центр блока 6 переместятся вверх на величину  $\delta X_{3,1} = 0,5\delta X_1$ . Парциальная работа задаваемых сил тяжести

$$\begin{aligned} \delta A_{F,1} &= m_1 g \cdot \delta X_1 - (m_3 g + m_6 g) \cdot \delta X_{3,1} = \\ &= \left(m_1 - \frac{m_3 + m_6}{2}\right) g \cdot \delta X_1. \end{aligned}$$

Множитель при  $\delta X_1$  в последнем выражении есть обобщенная сила

$$Q_1 = \left(m_1 - \frac{m_3 + m_6}{2}\right) g.$$

$$\text{Аналогично } Q_2 = (m_2 - \frac{m_3 + m_6}{2})g.$$

Согласно ПВП условия равновесия имеют вид  $Q_1 = Q_2 = 0$ , что дает нам два уравнения равновесия системы в произвольном ее положении

$$m_1 = m_2 = 0,5(m_3 + m_6).$$

Обобщенные силы можно также найти, составив выражение для потенциальной энергии системы  $\Pi = \Pi(x_1, x_2)$ .

Назначаем начальный уровень отсчета энергии  $\Pi$ : пусть  $\Pi(0,0) = 0$ . В произвольном положении системы грузы 1 и 2 опущены на  $x_1$  и  $x_2$ , а груз 3 и центр блока 6 подняты на высоту  $x_3 = 0,5(x_1 + x_2)$ . (Отметим, что в любой момент времени справедлива формула  $\dot{x}_3 = 0,5(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)$  - рис.15, в). Тогда

$$\Pi = -m_1gx_1 - m_2gx_2 + (m_3 + m_6)g \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Взяв от этой функции частные производные по  $x_1$  и  $x_2$ , находим обобщенные силы.

#### 4.2.8. Общее уравнение динамики системы в терминах обобщенных сил

При условии идеальности связей в любой момент времени движения механической системы каждая обобщенная задаваемая сила  $Q_j$  уравновешивается соответствующей обобщенной силой

инерции  $Z_j$ :

$$Q_j + Z_j = 0; \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

$$\text{Здесь } Z_j = \sum_{i=1}^n \vec{\Phi}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}.$$

### 4.3. Уравнения Лагранжа. Уравнения Гамильтона

#### 4.3.1. Уравнения Лагранжа второго рода (уравнения Лагранжа-2)

Обобщенная сила инерции  $Z_j$  может быть выражена через кинетическую энергию  $T$  системы:

$$Z_j = -\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right).$$

Из п. 4.8 получаем  $S$  уравнений Лагранжа 2 рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

Для того чтобы составить уравнения Лагранжа-2, надо выразить кинетическую энергию в виде функции от  $2S + 1$  переменных: обобщенных координат, обобщенных скоростей и (при нестационарных связях) времени:

$$T = T(q, \dot{q}, t)$$

(здесь  $q$  есть вектор обобщенных координат,  $\dot{q}$  - вектор обобщенных скоростей).

#### 4.3.2. Функция Лагранжа

Функция Лагранжа (кинетический потенциал) есть выражение

$$L(q, \dot{q}, t) = T - \Pi.$$

Уравнения Лагранжа-2 при наличии только потенциальных сил имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s,$$

а при наличии как потенциальных, так и непотенциальных  $Q_j^*$  сил

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^*, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

#### 4.3.3. Структура уравнений Лагранжа-2

Из выражения для радиус-вектора  $\vec{r}_i$  в п. 4.6 находим, что

$$\vec{v}_i = \frac{d}{dt} \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}.$$

Тогда кинетическая энергия системы равна

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^S a_{j,k} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{j=1}^S b_j \dot{q}_j + c_0,$$

где  $a_{j,k} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = a_{k,j}$ ,  $b_j = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$ ,

$$c_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2.$$

С учетом полученного выражения для функции  $T$  из п. 4.8 следует, что уравнения Лагранжа – 2 являются уравнениями второго порядка относительно обобщенных координат.

Если связи стационарны, то  $\forall i \quad \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = 0$ , и тогда кинетическая энергия является *квадратичной формой* обобщенных скоростей, причем определитель матрицы коэффициентов

$$\det(a_{j,k}) \neq 0.$$

#### 4.3.4. Вариационный принцип Гамильтона

Пусть задан промежуток времени  $[t_0; t_1]$ , на котором исследуется движение консервативной системы. Выражение

$$W = \int_{t_0}^{t_1} L dt, \text{ где } L \text{ - функция Лагранжа, называется действием по Гамильтону.}$$

Размерность этой величины  $1 \text{ Дж} \cdot \text{с}$ . Значение величины  $W$  зависит от того, какие функции  $q_1(t), q_2(t), \dots, q_S(t)$  (и, следовательно, какие функции  $\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_S(t)$ ) входят в выражение для  $L$ . Действие по Гамильтону представляет собой отображение набора функций  $q_j$  на множество действительных чисел и называется *функционалом*.

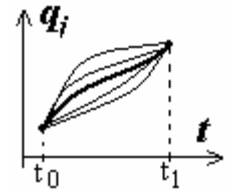
Функционал можно считать функцией от *функции*, в рассматриваемом случае – функцией от  $S$  функций  $q_j$ .

Набор функций  $q_j$  условно называется *путем* системы. При движении системы реализуется путь, называемый *прямым*. Другие пути, образующиеся благодаря варьированию величин  $q_j$  в каждой точке  $t$ , называются *окольными путями*. Окольные пути начинаются и заканчиваются в тех же точках пространства  $\{q, t\}$ , что и прямой путь. Принцип Гамильтона заключается в утверждении, что прямой путь отличается от окольных путей тем, что на нем действие принимает экстремальное (стационарное) значение. Экстремальное значение функционал приобретает при условии обращения в нуль его вариации, т.е. на прямом пути  $\delta W = 0$ .

Действительно,

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^S \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^S \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^S \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt. \end{aligned}$$

$$\text{При этом } \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^S d \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) = 0,$$



т.к. в начальной и конечной точках все пути сходятся: в этих точках  $\delta q_j = 0$ . В силу уравнений Лагранжа-2 получаем  $\delta W = 0$ .

### \*4.3.5. Уравнения Гамильтона

Введем вместо лагранжевых переменных  $q, \dot{q}$  гамильтоновы переменные  $p, q$ . Здесь  $p$  - вектор обобщенных импульсов, определяемых формулами

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$$

(потенциальная энергия зависит от переменных  $q_j$  и не зависит от  $\dot{q}_j$ ). Тогда каждое уравнение Лагранжа-2 можно записать так:

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}.$$

Пусть связи стационарны:  $T = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s a_{j,k} \dot{q}_j \dot{q}_k$ ; тогда справедливо равенство  $\sum_{j=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2T$ , или  $T = \sum_{j=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - T$ .

Отсюда получим

$$dT = \sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j + \sum \dot{q}_j d \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j - \sum \frac{\partial T}{\partial q_j} dq_j$$

или, с учетом введенных величин  $p_j$ ,

$$dT = \sum \dot{q}_j dp_j - \sum \frac{\partial T}{\partial q_j} dq_j.$$

С другой стороны, выражения  $p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$  представляют собой линейную систему уравнений относительно  $\dot{q}_j$ , определитель которой  $\det(a_{j,k}) \neq 0$  (предложение п. 4.3.3). Тогда существует единственное нетривиальное (ненулевое) решение этой системы, и

величины  $\dot{q}_j$  можно выразить через  $p_j$  и подставить в кинетическую энергию  $T$ , представив ее как функцию гамильтоновых переменных

$$T_* = T_*(p, q)$$

Отметим, что  $\Pi_* = \Pi(q, p) = \Pi(q)$ . Имеем далее

$$dT_* = \sum \frac{\partial T_*}{\partial p_j} dp_j + \sum \frac{\partial T_*}{\partial q_j} dq_j.$$

Поскольку  $dT_* = dT$ , получаем, что

$$\dot{q}_j = \frac{\partial T_*}{\partial p_j} = \frac{\partial (T_* + \Pi)}{\partial p_j} \quad \text{и} \quad \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial T_*}{\partial q_j}.$$

$$\text{Тогда} \quad \dot{p}_j = \frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = -\frac{\partial (T_* + \Pi)}{\partial q_j}.$$

Функцию  $H(p, q) = T_* + \Pi$  называют функцией Гамильтона. При стационарных связях она есть полная механическая энергия  $E$  системы, выраженная в гамильтоновых переменных.

Функцию Гамильтона можно представить также в виде:

$$H = \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - L_*.$$

Систему  $2s$  дифференциальных уравнений первого порядка относительно функций  $p_j$  и  $q_j$

$$\frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad \frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

называют каноническими уравнениями Гамильтона движения консервативной системы.

### 4.3.6.\* Циклические координаты

Обобщенная координата  $q_k$  называется циклической, если она явно не входит в выражение функции Лагранжа, т. е. если

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0. \text{ Тогда } \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} = 0, \text{ откуда следует}$$

$$p_k = \text{const},$$

т. е. имеем один из интегралов системы дифференциальных уравнений движения.

**4.4. Малые колебания консервативной системы** вблизи положения устойчивого равновесия

#### 4.4.1. Теорема Лагранжа об устойчивости положения равновесия

Пусть консервативная механическая система имеет положение равновесия, т.е. положение, в котором она остается бесконечно долго, если она имела в этом положении нулевые обобщенные скорости. Пусть значения обобщенных координат в положении равновесия равны нулю. Пусть также значение потенциальной энергии в этом положении равно нулю:

$$\Pi(0,0,\dots,0) = 0.$$

Положение равновесия называется *устойчивым*, если  $\forall \varepsilon > 0$   $\exists \delta > 0$  такое, что из условий  $|q_{j,0}| < \delta$ ,  $|\dot{q}_{j,0}| < \delta$  следует  $|q_j(t)| < \varepsilon$ ,  $|\dot{q}_j(t)| < \varepsilon$  при  $\forall t > t_0$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$ .

**Теорема:** если в некотором положении равновесия консервативной системы потенциальная энергия имеет строгий минимум, то это положение равновесия является устойчивым.

Доказательство теоремы предполагает «конструирование» величины  $\delta$  по заданной величине  $\varepsilon$ . Идея доказательства для случая одной переменной изображена на рис. 16.

Если помимо потенциальных и гироскопических сил действуют еще и диссипативные силы, имеющие строго отрицательную

мощность, то изолированное положение равновесия является асимптотически устойчивым:  $q(t) \rightarrow 0$ ,  $\dot{q}(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

*Предложение.* Определение устойчивого положения равновесия сформулировано для безразмерных обобщенных координат и безразмерного времени. Рассмотрите случай размерных величин. Введите масштабные коэффициенты и попробуйте сформулировать вновь это определение.

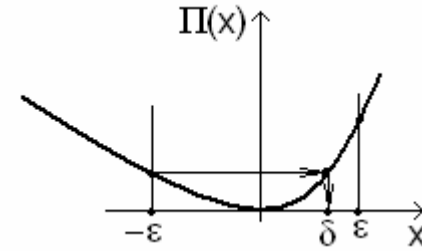


Рис. 16

**4.4.2. Малые колебания консервативной системы** вблизи положения устойчивого равновесия

Пусть в положении устойчивого равновесия  $q = 0$ , т.е.  $q_1 = q_2 = \dots = q_s = 0$  и пусть  $\Pi(0,0,\dots,0) = \Pi_0 = 0$ .

Рассмотрим движение консервативной системы вблизи положения равновесия. Разложим функцию  $\Pi$  в окрестности точки равновесия в ряд Маклорена:

$$\Pi = \Pi_0 + \sum_{j=1}^s \left( \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \right)_0 q_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_j \partial q_k} \right)_0 q_j q_k + \dots$$

По условию  $\Pi_0 = 0$ ; кроме того, согласно принципу виртуальных перемещений в положении равновесия обобщенные силы

$$Q_{j,0} = \left( \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \right)_0 = 0.$$

Отбрасывая члены третьего и высших порядков малости от-

носительно  $q_j$  и обозначая  $\left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_j \partial q_k} \right)_0 = c_{j,k}$ , получим



$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^S c_{j,k} q_j q_k.$$

Пусть связи стационарны. Разложим в выражении

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^S a_{j,k} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

коэффициенты  $a_{j,k}(q_1, q_2, \dots, q_S)$  также в ряды:

$$a_{j,k}(q_1, q_2, \dots, q_S) = a^0_{j,k} + \dots$$

С точностью до малых второго порядка включительно имеем:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^S a^0_{j,k} \dot{q}_j \dot{q}_k.$$

Таким образом, кинетическая энергия и потенциальная энергия представлены как соответствующие *положительно определенные* квадратичные формы обобщенных скоростей и координат. Уравнения Лагранжа-2 приобретают вид следующей линейной системы:

$$\sum_{k=1}^S (a^0_{j,k} \ddot{q}_k + c_{j,k} q_k) = 0.$$

Будем искать решение этой системы в следующем виде:

$$q_j = u_j \sin(\omega t + \alpha).$$

Подставив в систему дифференциальных уравнений эти формулы и приравняв коэффициенты при  $\sin(\omega t + \alpha)$ , получим систему однородных линейных уравнений относительно амплитуд  $u_j$ :

$$\sum_{k=1}^S (c_{j,k} - \omega^2 a^0_{j,k}) u_k = 0, \quad j = 1, 2, \dots, S.$$

Нетривиальное решение последняя система имеет при условии равенства нулю ее определителя, т.е.

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \omega^2 a_{11} & c_{12} - \omega^2 a_{12} & \dots & c_{1S} - \omega^2 a_{1S} \\ & \dots & & \\ c_{S1} - \omega^2 a_{S1} & c_{S2} - \omega^2 a_{S2} & \dots & c_{SS} - \omega^2 a_{SS} \end{vmatrix} = 0.$$

Данное уравнение называется частотным уравнением, или *вековым*. Оно является уравнением  $S$ -той степени относительно  $\omega^2$ . Благодаря симметричности и положительной определенности матрицы  $(a_{jk})$  квазиинерционных коэффициентов и симметричности матрицы  $(c_{jk})$  квазиупругих коэффициентов все корни  $\omega_k^2$  векового уравнения являются неотрицательными. Каждому корню  $\omega_k^2$  соответствует своя система однородных линейных уравнений относительно амплитуд  $u_j^k$ . Так как определитель системы равен нулю, существует бесконечно много ее решений. Если положить, например,  $u_1^k = 1$ , то остальные амплитуды  $u_2^k, u_3^k, \dots, u_S^k$  выражаются из системы уже однозначно и представляют собой отношения соответствующих амплитуд к первой амплитуде. Совокупность этих отношений называется *формой* колебаний, соответствующей частоте  $\omega_k$ . Отношения амплитуд называют также *коэффициентами форм*.

Квадратичные формы  $(a_{jk})$  и  $(c_{jk})$  можно одним и тем же неособенным преобразованием переменных  $q_j = \sum_{k=1}^S b_{jk} \eta_k$  («неособенное» означает  $\det(b_{jk}) \neq 0$ ) привести обе к диагональному виду, и тогда дифференциальные уравнения движения будут иметь вид

$$\ddot{\eta}_j + \omega^2 \eta_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, S.$$

Новые обобщенные координаты  $\eta_j$  называются *нормальными координатами* колебательной системы.

## Основная литература

1. Гернет М. М. Курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1987.
2. Яблонский А. А., Никифорова В. М. Курс теоретической механики. - СПб: Изд-во «Лань», 2001.
3. Яблонский А.А. Сборник задач для курсовых работ по теоретической механике. - М.: Высшая школа, 1985 (и предыдущие изд.).

## Дополнительная литература

4. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. – М.: Наука, 1966 (и послед. изд.).
5. Бутенин Н. Н., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики. Т. I и II. - М.: Наука, 1985, 240 с. и 496 с.
6. Добронравов В. В., Никитин Н. Н. Курс теоретической механики. - М.: Высшая школа, 1983, 576 с.
7. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики. Части I и II. - М.: Наука, 1982.
8. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики. - М.: Высшая школа, 1995.
9. Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах, ч.1, 2, 3. —М.: Физматгиз, 1995.
10. Сборник задач по теоретической механике/ Под ред. К.С. Колесникова.- М.: Наука, 1983 (и послед. изд.).
11. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. - М.: Наука, 1986 (и послед. изд.).
12. Теоретическая механика: терминология, обозначения, основные формулы (Справочное учебное пособие) / Составитель Э.Е. Пейсах. - СПб: изд-во СПГУТД, 1995, 32 с.

Quantus tremor est futurus.  
 Judex ergo cum sedebit.  
 Quando judex est venturus,  
 Quidquid latet, apparebit.  
 Cuncta stricte discussurus.  
*Nil inultum remanebit!*

(“Dies irae”)